

Тест ЗНО з математики.

Результат

100% :)

Тестовий бал ?

52 із 52

Рейтинговий бал ?

200.0

Витрачено часу: 4 хвилини

[Ще раз](#) [Інший варіант](#) [Статистика](#)

Поділитися...

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35	36						

1

Обчисліть $\sqrt{125} \sqrt[5]{32} - 5^{\frac{1}{2}}$.

- ☐ А $11\sqrt{5}$
- ☐ Б $10\sqrt{2} - \sqrt{5}$
- ☐ В 9
- ☒ Г $9\sqrt{5}$
- ☐ Д $\sqrt[10]{4000} - \sqrt{5}$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$\sqrt{125} \cdot \sqrt[5]{32} - 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5^3} \cdot \sqrt[5]{2^5} - 5^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{5} \cdot 2 - \sqrt{5} = 10\sqrt{5} - \sqrt{5} = 9\sqrt{5}.$$

2

Якщо $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$, то $c =$

☒ А $\frac{ab}{a-b}$

☐ Б $\frac{ab}{b-a}$

☐ В $a-b$

☐ Г $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$

☐ Д $\frac{a-b}{ab}$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Якщо $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$, то $\frac{1}{c} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$.

Тоді $c = \frac{ab}{a-b}$.

3

Знайдіть вираз, тотожно рівний виразу $x^4 + x^3 - x - 1$.

☐ А $(x+1)^2(x^2+x+1)$

☐ Б $(x^2-x+1)(x-1)^2$

☐ В $(x-1)^3(x+1)$

☐ Г $(x-1)(x+1)^3$

☒ Д $(x^2-1)(x^2+x+1)$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 - x - 1 &= x^3(x+1) - (x+1) = (x^3-1)(x+1) = \\ &= (x-1)(x^2+x+1)(x+1) = (x^2-1)(x^2+x+1). \end{aligned}$$

Розв'яжіть нерівність $a^2 > a$.

- ☐ А $(1; +\infty)$
- ☐ Б $(0; 1)$
- ☐ В $(-\infty; 0)$
- ☒ Г $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$
- ☐ Д $(-\infty; 1)$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$a^2 > a,$$

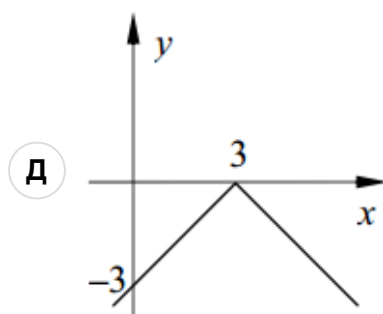
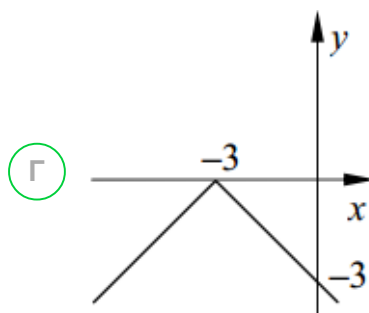
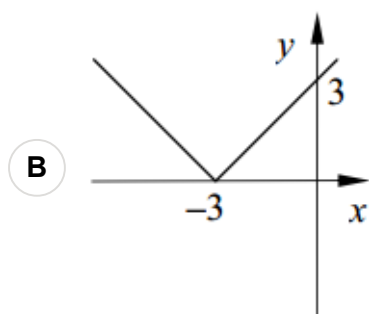
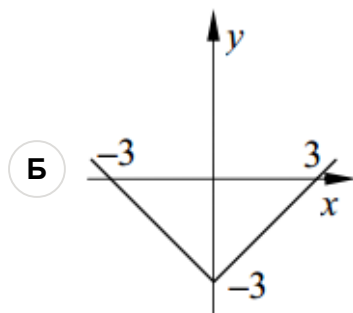
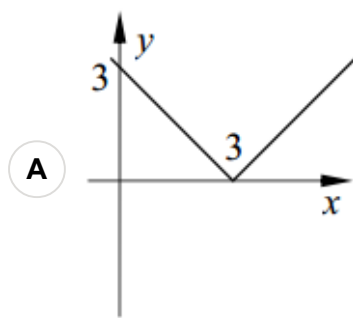
$$a^2 - a > 0,$$

$$a(a - 1) > 0,$$



$$a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty).$$

З-поміж наведених графіків укажіть графік функції $y = -|x + 3|$.

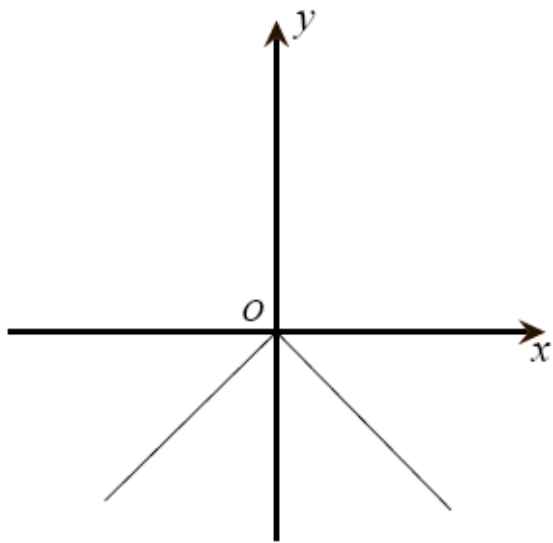


Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Зобразимо схематично графік функції $y = -|x|$.



Графік функції $y = -|x + 3|$ одержимо з графіка функції $y = -|x|$ паралельним перенесенням на 3 одиниці ліворуч вздовж осі Ox . Як результат маємо графік функції на малюнку 4.

6

Товар подешевшав на 20 %. На скільки відсотків більше можна купити товару за ту ж саму суму грошей?

- ☐ А $\frac{1}{5}$ %
- ☐ Б $\frac{1}{4}$ %
- ☐ В 10 %
- ☐ Г 20 %
- ☒ Д 25 %

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

1) Нехай до подешевшання товар коштував x грн. Після подешевшання на 20 % він коштує $(0,8x)$ грн.

2) Далі задача переформулюється так: скільки відсотків становить x грн, якщо $(0,8x)$ грн становить 100 %?

Одержимо:

$$\frac{x}{0,8x} \cdot 100 \% = \frac{100 \%}{0,8} = \frac{1000 \%}{8} = 125 \%$$

Отже, тепер можна купити на 25 % більше товару.

Обчисліть значення виразу $\log_5 49 + 2 \log_5 \frac{5}{7}$.

- ☐ А 0
- ☐ Б 1
- ☒ В 2
- ☐ Г 4
- ☐ Д 25

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$\begin{aligned} \log_5 49 + 2 \log_5 \frac{5}{7} &= \log_5 7^2 + 2 \log_5 7 + 2 \log_5 \frac{5}{7} = 2 \left(\log_5 7 + \log_5 \frac{5}{7} \right) = \\ &= 2 \log_5 \left(7 \cdot \frac{5}{7} \right) = 2 \log_5 5 = 2. \end{aligned}$$

Розв'яжіть рівняння $\sin(3x) = \frac{1}{2}$.

- ☐ А $(-1)^k \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$
- ☐ Б $\pm \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}, k \in Z$
- ☒ В $(-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$
- ☐ Г $\pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}, k \in Z$
- ☐ Д $(-1)^k \frac{\pi}{18} k + \pi k, k \in Z$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$\sin(3x) = \frac{1}{2},$$

$$3x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$3x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

9

Знайдіть множину значень функції $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$.

- ☐ А $[1; 2]$
- ☒ Б $[0; 2]$
- ☐ В $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$
- ☐ Г $[0; 1]$
- ☐ Д інша відповідь

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$f(x) = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x.$$

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1, \quad \text{тоді } 0 \leq \sin 2x + 1 \leq 2.$$

Отже, множиною значень функції $f(x)$ є відрізок $[0; 2]$.

10

Задано рівняння:

(1) $\log_2 x - \log_2 (x - 2) = 1,$

(2) $\cos x = 1 - \sqrt{3},$

(3) $|x + 2| = -3,$

(4) $\sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\pi.$

Укажіть рівняння, яке НЕ МАЄ коренів на множині дійсних чисел.

- ☐ А (1) і (4)
- ☐ Б (2) і (3)
- ☐ В (1) і (2)
- ☒ Г (3) і (4)
- ☐ Д інша відповідь

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$1) \log_2 x - \log_2(x - 2) = 1.$$

Знайдемо область допустимих значень змінної x : $\begin{cases} x > 0, \\ x - 2 > 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x > 2. \end{cases}$$

$$x > 2.$$

Тепер задане рівняння запишемо у вигляді:

$$\log_2 \frac{4}{x-2} = 1 = \log_2 2.$$

$$\text{Тоді } \frac{x}{x-2} = 2;$$

$$\frac{x}{x-2} - 2 = \frac{x - 2x + 4}{x-2} = \frac{4-x}{x-2} = 0,$$

$$\text{звідки } x = 4.$$

Отже, задане рівняння має корінь на множині дійсних чисел.

$$2) \cos x = 1 - \sqrt{3}.$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1,$$

$$-1 < 1 - \sqrt{3} < 0, \quad \text{значить, дане рівняння має корені на множині дійсних чисел.}$$

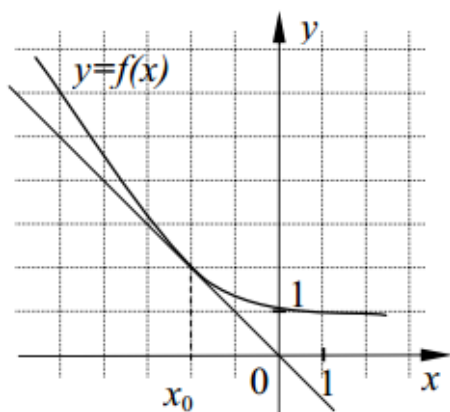
3) Значення модуля — величина невід'ємна, тому задане рівняння не має коренів на множині дійсних чисел.

$$4) \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\pi.$$

$$-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1,$$

$$-\pi < 1, \quad \text{тому дане рівняння не має коренів на множині дійсних чисел.}$$

На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$ і дотичну до нього у точці з абсцисою x_0 .



Знайдіть значення $f'(x_0)$.

- ☐ А -2
- ☒ Б -1
- ☐ В 0
- ☐ Г 1
- ☐ Д 2

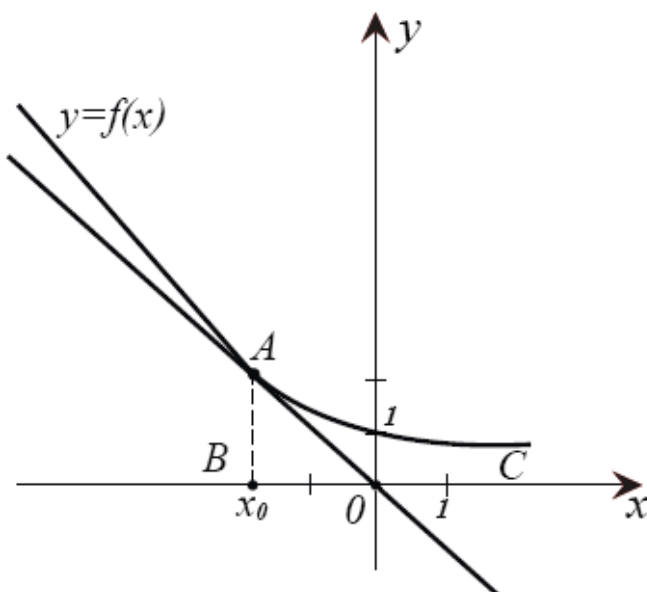
Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Похідна функції $f(x)$ в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної, проведеної до графіка функції $f(x)$ в точці з абсцисою x_0 , до додатного напрямку осі Ox . Тобто

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \angle AOC = \operatorname{tg} (180^\circ - \angle AOB) = -\operatorname{tg} \angle AOB = -\frac{AB}{BO} = -\frac{2}{2} = -1.$$



Обчисліть значення виразу $\sin \alpha + \sin \beta$, якщо $\alpha - \beta = 180^\circ$.

- ☐ А 1
- ☐ Б $\frac{1}{2}$
- ☒ В 0
- ☐ Г $-\frac{1}{2}$
- ☐ Д інша відповідь

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{180^\circ}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos 90^\circ = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot 0.\end{aligned}$$

13

Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{4}} 3 \cdot \log_4 x > 0$.

- ☐ А $(1; +\infty)$
- ☐ Б $(0; 4)$
- ☒ В $(0; 1)$
- ☐ Г $(4; +\infty)$
- ☐ Д $(-\infty; 1)$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$\log_{\frac{1}{4}} 3 \cdot \log_4 x > 0.$$

Областю допустимих значень змінної x є проміжок $(0; +\infty)$.

$$\log_{\frac{1}{4}} 3 = -\log_4 3.$$

$\log_4 3 > 0$, тому $-\log_4 3 < 0$, тобто, $\log_{\frac{1}{4}} 3 < 0$.

Поділимо обидві сторони нерівності на $\log_{\frac{1}{4}} 3$.

Одержимо $\log_4 x < 0 = \log_4 1$.

Тому $\log_4 x < \log_4 1$.

Значить, $x < 1$.

Враховавши область допустимих значень змінної x , маємо

$$\begin{cases} x < 1, \\ x > 0. \end{cases}$$

$$x \in (0; 1).$$

14

Укажіть непарну функцію.

☐ А $y = x^2 - 4$

☐ Б $y = -x^2$

☐ В $y = x^3 - 1$

☐ Г $y = \sqrt{x - 2}$

☒ Д $y = x^3 - x$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Функція $f(x)$ називається *непарною*, якщо для будь-якого x з області визначення виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.

а) Бачимо, що за такої умови область визначення повинна бути множиною, симетричною відносно початку координат.

Областю визначення функції $y = \sqrt{x - 2}$ є проміжок $[2; +\infty)$. Це множина, яка не симетрична відносно початку координат. Тому функція $y = \sqrt{x - 2}$ не є непарною.

У всіх решта заданих функцій областю визначення є множина дійсних чисел $\mathbb{R}$. Ця множина симетрична відносно початку координат.

б) Тепер перевіримо, для якої з функцій $1 - 3,5$ виконується умова $f(-x) = -f(x)$.

1) $f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x) \neq -f(x)$.

2) $f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 = f(x) \neq -f(x)$.

3) $f(-x) = (-x)^3 - 1 = -x^3 - 1 = -(x^3 + 1) \neq -f(x)$.

5) $f(-x) = (-x^3) - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$.

Отже, функція $y = x^3 - x$ є *непарною*.

Знайдіть область визначення функції $y = \frac{\sqrt{x+2}}{2^x - 1}$.

- ☒ А $[-2; 0) \cup (0; +\infty)$
- ☐ Б $[-2; +\infty)$
- ☐ В $(-2; 0) \cup (0; +\infty)$
- ☐ Г $(-\infty; -2]$
- ☐ Д $x \neq 1$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0, \\ 2^x - 1 \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -2, \\ 2^x \neq 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -2, \\ 2^x \neq 2^0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -2, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Отже, маємо область визначення даної функції $[-2; 0) \cup (0; +\infty)$.

Власник банкоматної картки забув останні дві цифри свого PIN-коду, але пам'ятає, що вони різні. Знайдіть імовірність того, що з першої спроби він отримає доступ до системи.

- ☐ А $\frac{1}{2}$
- ☐ Б $\frac{1}{25}$
- ☐ В $\frac{1}{50}$
- ☒ Г $\frac{1}{90}$
- ☐ Д $\frac{1}{100}$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

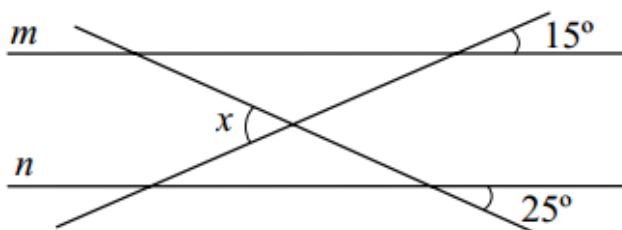
Першу цифру власник картки може витратити десятьма способами (це цифри від 0 до 9), другу — дев'ятьма (серед цифр, які залишилися після першого вибору, бо цифри різні). За комбінаторним правилом добутку маємо, що дві цифри власник картки може вибрати $10 \cdot 9 = 90$ рівноможливими способами.

Обчислимо, скільки серед цих способів таких, що обидві цифри набрано вірно. Першу цифру можна вірно обрати лише одним способом, другу — також одним способом. За комбінаторним правилом добутку маємо $1 \cdot 1 = 1$.

Отже, ймовірність того, що з першого разу власник картки набере вірні цифри — $1 \div 90 = \frac{1}{90}$.

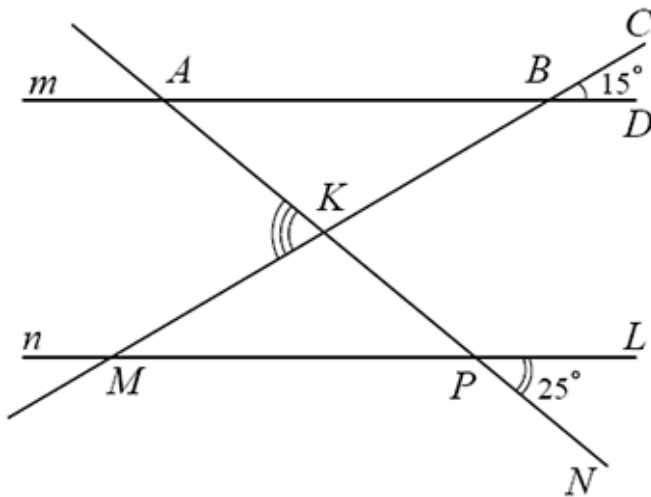
17

Прямі m і n паралельні. Обчисліть величину кута x , зображеного на рисунку.



- ☒ А 40°
- ☐ Б 45°
- ☐ В 50°
- ☐ Г 80°
- ☐ Д 140°

[Приховати пояснення](#)



1) $\angle KPM = 25^\circ$ як вертикальний з $\angle NPL$.

2) $\angle KMP = 15^\circ$ як відповідний $\angle CBD$ (ці відповідні кути утворені при перетині паралельних прямих m і n січною MB).

3) Сума кутів трикутника дорівнює 180° .

Тоді з $\triangle MKP$ маємо:

$$\angle MKP = 180^\circ - \angle KPM - \angle KMP = 180^\circ - 25^\circ - 15^\circ = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ.$$

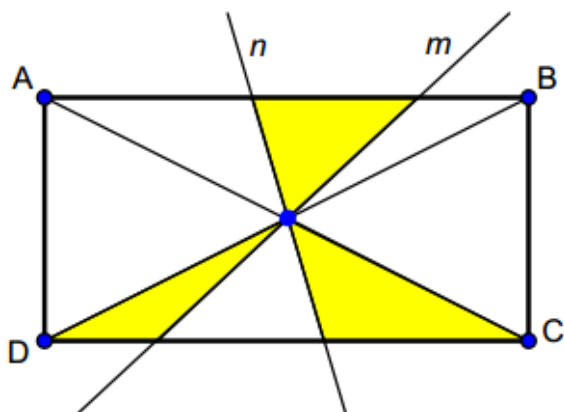
4) $\angle AKM$ суміжний з $\angle MKP$.

18

У прямокутнику $ABCD$ прямі m і n проходять через точку перетину діагоналей.

Площа фігури, що складається з трьох зафарбованих трикутників, дорівнює 12 см^2 .

Обчисліть площу прямокутника $ABCD$.

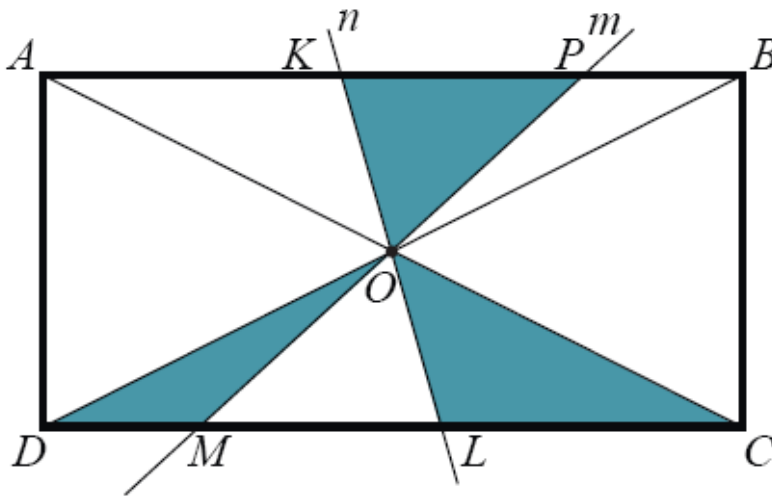


- ☐ А 24 см^2
- ☐ Б 30 см^2
- ☐ В 36 см^2
- ☐ Г 42 см^2
- ☒ Д 48 см^2

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)



1) Діагоналі прямокутника точкою перетину діляться навпіл. Діагоналі прямокутника рівні. Отже, $AO = OC$, $DO = OB$.

2) $\angle KAO = \angle LCO$, $\angle PKO = \angle MLO$, $\angle PBO = \angle MDO$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AB і DC та січних AC , KL , DB відповідно.

3) $\angle AOK = \angle COL$, $\angle KOP = \angle LOM$, $\angle POB = \angle MOD$ як вертикальні.

4) Тоді $\triangle AOK = \triangle COL$, $\triangle BOP = \triangle DOM$ за стороною і двома прилеглими кутами.

5) Значить, $KO = OL$.

$\triangle KOP = \triangle LOM$ за стороною і двома прилеглими кутами.

6) Рівні трикутники мають рівні площі.

$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COL},$$

$$S_{\triangle KOP} = S_{\triangle LOM},$$

$$S_{\triangle BOP} = S_{\triangle DOM}.$$

7)

$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOK} + S_{\triangle KOP} + S_{\triangle BOP} = S_{\triangle COL} + S_{\triangle KOP} + S_{\triangle DOM} = 12 \text{ см}^2.$$

8) Медіана розбиває трикутник на два рівновеликі трикутники. AO — медіана $\triangle DAB$.

$$\text{Тоді } S_{\triangle DAB} = S_{\triangle ADO} + S_{\triangle AOB} = 2S_{\triangle AOB} = 2 \cdot 12 = 24 \text{ см}^2.$$

9) Протилежні сторони прямокутника рівні. Тому $\Delta DAB = \Delta BCD$ як прямокутні з рівними катетами.

Тоді $S_{\Delta DAB} = S_{\Delta BCD} = 24 \text{ см}^2$.

10) Площа прямокутника $ABCD$ дорівнює

$$S_{ABCD} = 2S_{\Delta DAB} = 2 \cdot 24 = 48 \text{ см}^2.$$

19

Ортогональною проекцією відрізка з кінцями у точках $A(-1; 0; 5)$ і $B(-1; 0; 8)$ на координатну площину xy є

- ☐ А пряма.
- ☐ Б промінь.
- ☐ В відрізок.
- ☒ Г точка.
- ☐ Д фігура, що відрізняється від перелічених.

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Ортогональною проекцією точки $A(-1; 0; 5)$ на площину XY є точка $(-1; 0; 0)$.
Ортогональною проекцією точки $B(-1; 0; 8)$ на площину XY є точка $(-1; 0; 0)$.
Тобто, ортогональною проекцією відрізка AB на площину XY є *точка*.

20

Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням куба навколо свого ребра, довжина якого a .

- ☐ А $4a^3$
- ☐ Б πa^3
- ☒ В $2\pi a^3$
- ☐ Г $4\pi a^3$
- ☐ Д $(2 + 2\sqrt{2})\pi a^2$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

При обертанні куба навколо свого ребра утворюється циліндр з висотою, що дорівнює ребру куба, і радіусом основи, що дорівнює діагоналі основи куба.

Якщо довжина ребра куба a , то довжина висоти циліндра — a , довжина радіуса основи циліндра — $a\sqrt{2}$.

Тоді об'єм циліндра $V_{\text{циліндра}} = \pi(a\sqrt{2})^2 \cdot a = 2\pi a^3$ (куб. од.).

21

Укажіть найменше ціле число, яке є розв'язком нерівності $\frac{x^2 + 2x - 3}{|x + 2|} < 0$.

Ви відповіли правильно: -1

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{|x + 2|} < 0,$$

$$\frac{(x + 3)(x - 1)}{|x + 2|} < 0.$$



Тоді найменшим цілим розв'язком нерівності є число -1 .

22

Обчисліть суму перших 20 членів арифметичної прогресії, якщо її перший член дорівнює 2, а сьомий — 20.

Ви відповіли правильно: 610

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

Нехай маємо арифметичну прогресію (a_n) , в якій $a_1 = 2$, $a_7 = 20$.

За формулою n -го члена арифметичної прогресії

$$a_7 = a_1 + d(7 - 1) = a_1 + 6d = 2 + 6d = 20.$$

Тоді $6d = 18$, $d = 3$ (d — різниця арифметичної прогресії).

За формулою суми n перших членів арифметичної прогресії маємо

$$S_{20} = \frac{2a_1 + d(20 - 1)}{2} \cdot 20 = \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 19}{2} \cdot 20 = \frac{61 \cdot 20}{2} = 61 \cdot 10 = 610.$$

Обчисліть значення виразу $\frac{53}{8 - \sqrt{11}} + \frac{2}{\sqrt{13} + \sqrt{11}} - \frac{9}{\sqrt{13} + 2}$.

Ви відповіли правильно: 10

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

$$\begin{aligned} \frac{53}{8 - \sqrt{11}} + \frac{2}{\sqrt{13} + \sqrt{11}} - \frac{9}{\sqrt{13} + 2} &= \frac{53(8 + \sqrt{11})}{(8 - \sqrt{11})(8 + \sqrt{11})} + \\ &+ \frac{2(\sqrt{13} - \sqrt{11})}{(\sqrt{13} - \sqrt{11})(\sqrt{13} + \sqrt{11})} - \frac{9(\sqrt{13} - 2)}{(\sqrt{13} + 2)(\sqrt{13} - 2)} = \\ &= \frac{53(\sqrt{11} + 8)}{64 - 11} + \frac{2(\sqrt{13} - \sqrt{11})}{13 - 11} - \frac{9(\sqrt{13} - 2)}{13 - 4} = \\ &= \frac{53(\sqrt{11} + 8)}{53} + \frac{2(\sqrt{13} - \sqrt{11})}{2} - \frac{9(\sqrt{13} - 2)}{9} = \\ &= 8 + \sqrt{11} + \sqrt{13} - \sqrt{11} - \sqrt{13} + 2 = 10. \end{aligned}$$

(Задача Л. Пізанського, XII—XIII ст.)

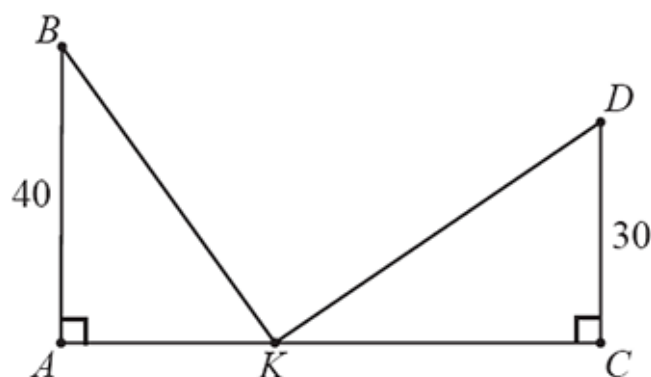
Дві вежі, одна з яких — 40 футів, а друга — 30 футів заввишки, розташовано на відстані 50 футів одна від одної. До криниці, що знаходиться між ними, одночасно з обох веж злетіло по пташці. Рухаючись з однаковою швидкістю, вони прилетіли до криниці одночасно. Знайдіть відстань від криниці до найближчої вежі (*у футах*).

Ви відповіли правильно: 18

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

Розглянемо схематичний малюнок до задачі.



Відрізком AB зобразимо башню заввишки 40 футів, відрізком CD — бачимо заввишки 30 футів, відрізком AC — відстань між башнями. $AC \perp AB$, $AC \perp CD$.

За умовою задачі колодязь знаходиться між башнями, тому точка K , яка зображає місцезнаходження колодязя, належить відрітку AC .

Тоді AK — відстань від колодязя до 40-футової башні, CK — відстань від колодязя до 30-футової башні. Оскільки швидкості і час польоту пташок однакові, то відстань вони пролетять однакову, тобто, $BK = DK$.

Нехай $AK = x$ ($0 < x < 50$). Тоді $CK = 50 - x$.

З $\triangle ABK$ за теоремою Піфагора:

$$BK^2 = AB^2 + AK^2 = 40^2 + x^2.$$

З $\triangle CDK$ за теоремою Піфагора:

$$DK^2 = CD^2 + CK^2 = 30^2 + (50 - x)^2.$$

Тоді $BK^2 = DK^2$. Значить

$$40^2 + x^2 = 30^2 + (50 - x)^2,$$

$$40^2 + x^2 = 30^2 + 50^2 + x^2 - 100x.$$

$$100x = 50^2 - 40^2 + 30^2 = (50 - 40)(50 + 40) + 30^2 = 10 \cdot 90 + 900 = \\ = 900 + 900 = 1800.$$

$$x = 18.$$

Отже, $AK = 18$ футів, $CK = 50 - 18 = 32$ фути. Значить, відстань від колодязя до найближчої башні — 18 футів.

25

Обчисліть значення виразу $\sin 2\alpha$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{2}$. Відповідь запишіть ДЕСЯТКОВИМ ДРОБОМ.

Ви відповіли правильно: $-0,8$

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

1) Якщо $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{2}$, тобто, $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{1}{2}$, то $\sin \alpha = -2 \cos \alpha$.

2) Якщо $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{2}$, а $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, то $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{5}{4}$.

Тоді $\sin^2 \alpha = \frac{4}{5} = 0,8$.

3) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = -2 \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha) = -\sin^2 \alpha = -0,8$.

26

Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{-2x}$.

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, запишіть у відповідь їх добуток.

Ви відповіли правильно: -3

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

$$\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{-2x}.$$

Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 = -2x, \\ -2x \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 = 0, \\ x \leq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Звідки $x = -3$.

27

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24, \\ 2^y \cdot 3^x = 54. \end{cases}$ Запишіть у відповідь СУМУ $x_0 + y_0$, якщо пара $(x_0; y_0)$ є розв'язком системи рівнянь.

Ви відповіли правильно: 4

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24, \\ 2^y \cdot 3^x = 54. \end{cases}$$

Оскільки $2^y \neq 0$, $3^x \neq 0$, то поділимо перше рівняння системи на друге. Одержимо

$$\frac{2^x}{2^y} \cdot \frac{3^y}{3^x} = \frac{24}{54} = \frac{4}{9},$$

$$2^{x-y} \cdot 3^{y-x} = \frac{4}{9},$$

$$\frac{2^{x-y}}{3^{x-y}} = \frac{4}{9},$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Тоді $x - y = 2$,

$$x = 2 + y.$$

Наша система набере виду

$$\begin{cases} x = 2 + y, \\ 2^y \cdot 3^x = 54. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + y, \\ 2^y \cdot 3^{2+y} = 54. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + y, \\ 2^y \cdot 3^2 \cdot 3^y = 54. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + y, \\ 9 \cdot 2^y \cdot 3^y = 54. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + y, \\ 6^y = 6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + y, \\ y = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases}$$

Пара (3; 1) є розв'язком даної системи рівнянь. Тоді шукана сума —

$$3 + 1 = 4.$$

28

Обчисліть $\frac{1}{25} \cdot 9^{\log_3 \sqrt{14} + 0,5}$. Відповідь запишіть ДЕСЯТКОВИМ ДРОБОМ.

Ви відповіли правильно: 1,68

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

$$\begin{aligned} \frac{1}{25} \cdot 9^{\log_a \sqrt{14} + 0,5} &= \frac{1}{25} \cdot 3^{2(\log_a \sqrt{14} + 0,5)} = \frac{1}{25} \cdot 3^{\log_a 14 + 1} = \\ &= \frac{1}{25} \cdot 3^{\log_a 14} \cdot 3^1 = \frac{3}{25} \cdot 14 = \frac{42}{25} = \frac{168}{100} = 1,68. \end{aligned}$$

29

Відрізок 12 см завдовжки поділили на дві частини так, що сума площ квадратів, побудованих на цих частинах, стала найменшою. Обчисліть суму площ квадратів.

Ви відповіли правильно: 72

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

Відрізок завдовжки 12 см поділили на дві частини. Нехай довжина однієї частини x см

(звісно, $0 < x < 12$), а другої — $(12 - x)$ см.

Тоді площі квадратів, сторонами яких є відрізком завдовжки x см і $(12 - x)$ см, відповідно дорівнюють x^2 та $(12 - x)^2$. Сума цих площ дорівнює

$$x^2 + (12 - x)^2 = x^2 + 144 - 24x + x^2 = 2x^2 - 24x + 144.$$

Розглянемо функцію $f(x) = 2x^2 - 24x + 144$, визначену на інтервалі $(0; 12)$, і знайдемо, при якому значенні x вона набуває найменшого значення.

1 спосіб.

Маємо $f'(x) = 4x - 24$. Знайдемо критичні точки даної функції.

$$4x - 24 = 0,$$

$$4x = 24,$$

$$x = 6.$$

Число 6 належить проміжку $(0; 12)$, отже, $x = 6$ — критична точка функції $y = 2x^2 - 24x + 144$.

Тепер перевіримо, чи набуває функція $f(x)$ найменшого значення при $x = 6$. Для цього дослідимо знак похідної $f'(x)$ на кожному з проміжків — $(0; 6)$ та $(6; 12)$.

Перевірка показує, що

$$f'(x) < 0, \text{ якщо } x \in (0; 6),$$

$$f'(x) > 0, \text{ якщо } x \in (6; 12).$$

Значить, $x = 6$ — точка мінімуму функції $f(x)$ на проміжку $(0; 12)$.

$$\min f(x) = f(6) = 2 \cdot 6^2 - 24 \cdot 6 + 144 = 72 - 144 + 144 = 72.$$

2 спосіб.

Графіком функції $y = 2x^2 - 24x + 144$ є парабола з вітками направленними догори. Значить, мінімального значення функція $f(x)$ набуває у вершині параболи.

Абсцису вершини параболи $y = ax^2 + bx + c$ шукаємо за формулою

$$x_{\text{вершини}} = -\frac{b}{2a}.$$

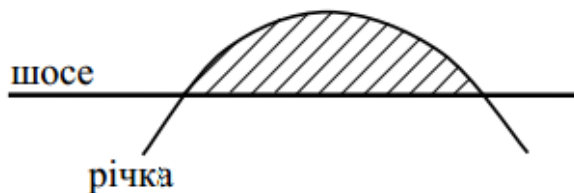
Для нашого випадку маємо

$$x_{\text{вершини}} = \frac{24}{2 \cdot 2} = \frac{24}{4} = 6.$$

$$\text{Тоді } f(6) = 72.$$

Тобто, шукана сума площ квадратів дорівнює 72 см^2 .

Річка тече лугом і двічі перетинає шосе, утворюючи криву $y = 3x - x^2$. Яка площа (км^2) луку між шосе та річкою, якщо вважати, що лінія шосе збігається з віссю OX (див. рис.)? Одиниця довжини — 1 км.



Ви відповіли правильно: 4,5

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

Оскільки лінія шосе співпадає з віссю Ox , то шукана площа — це площа фігури, утвореної кривою $y = 3x - x^2$ та віссю Ox .

1) Знайдемо абсцису точки перетину кривої $y = 3x - x^2$ з віссю Ox .

$$3x - x^2 = 0,$$

$$x(3 - x) = 0,$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ x = 3. \end{cases}$$

2) Тоді шукана площа дорівнює

$$\begin{aligned} \int_0^3 (3x - x^2) dx &= \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \left(\frac{27}{2} - \frac{27}{3} \right) = \frac{27 \cdot 3}{6} - \frac{27 \cdot 2}{6} = \\ &= \frac{27(3 - 2)}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4,5. \end{aligned}$$

Отже, шукана площа дорівнює $4,5 \text{ км}^2$.

31

Знайдіть НАЙМЕНШЕ значення параметра a , при якому система $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ (x - 7)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

Ви відповіли правильно: -8

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

Розглянемо друге рівняння системи $(x - 7)^2 + y^2 = 1$.

Його графіком є коло з центром в точці $(7; 0)$ і радіусом завдовжки 1.

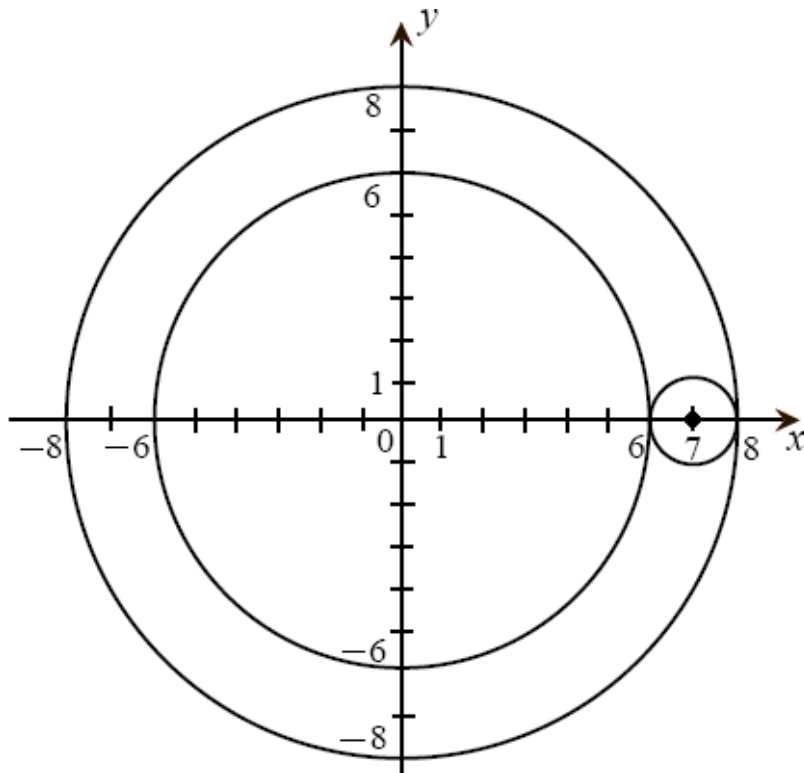
Розглянемо перше рівняння системи $x^2 + y^2 = a^2$.

Якщо $a = 0$, то графіком цього рівняння є точка $(0; 0)$.

Якщо $a \neq 0$, то графіком цього рівняння є коло з центром в точці $(0; 0)$ і радіусом $|a|$.

Система матиме єдиний розв'язок, якщо ці кола дотикатимуться. Зобразимо

схематично обидва кола, коли вони дотикаються.



Тоді

$$\begin{cases} |a| = 8, \\ |a| = 6. \end{cases}$$

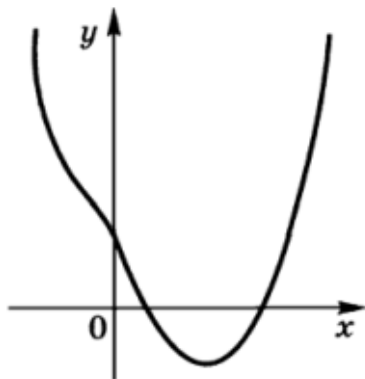
$$\begin{cases} a = \pm 8, \\ x = \pm 6. \end{cases}$$

Отже, при $a = \pm 6$ або $a = \pm 8$ кола дотикаються, тобто, система має єдиний розв'язок.

Найменшим значенням параметра a серед знайдених є -8 .

32

На рисунку зображено графік функції $f(x) = x^4 - x^2 + bx + c$. Визначте знаки параметрів b і c .



У відповіді вкажіть номер правильного варіанта з наведених нижче.

1. $\begin{cases} b > 0, \\ c > 0. \end{cases}$
2. $\begin{cases} b > 0, \\ c < 0. \end{cases}$
3. $\begin{cases} b < 0, \\ c > 0. \end{cases}$
4. $\begin{cases} b < 0, \\ c < 0. \end{cases}$

Ви відповіли правильно: 3

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

1) Визначимо знак параметра c .

Графік функції $f(x) = x^4 - x^2 + bx + c$ перетинає вісь Oy в точці $(0; c)$ (тобто, $f(0) = c$).

Як видно з графіка, ордината точки перетину з віссю Oy додатна, тобто, $c > 0$.

2) Визначимо знак параметра b .

$x = 0$ належить проміжку, на якому функція спадає.

Тобто, $f'(0) < 0$.

Обчислимо:

$$f'(x) = 4x^3 - 2x + b,$$

$$f'(0) = 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + b = b.$$

Значить, $b < 0$.

Тому правильний варіант відповіді —

$$\begin{cases} b < 0, \\ c > 0. \end{cases}$$

33

Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}(2x+5)\right) = 1 + (y-1)^8, \\ 4\sin\frac{\pi y}{2} = 4x^2 + 4x + 5. \end{cases}$$

Запишіть у відповідь ДОБУТОК x_0y_0 , якщо пара $(x_0; y_0)$ є розв'язком системи рівнянь.

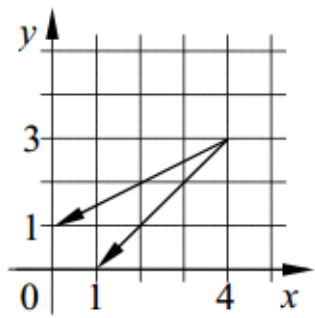
Ви відповіли правильно: $-0,5$

Бали: 2 із 2

[Подивитися пояснення](#)

34

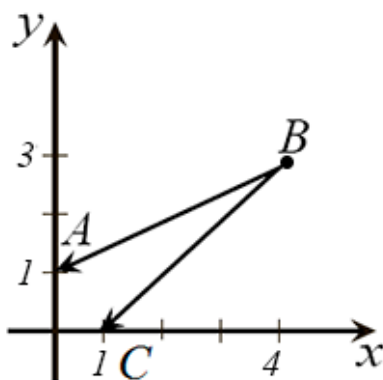
Обчисліть скалярний добуток векторів, зображених на рисунку.



Ви відповіли правильно: 18

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)



Розглянемо три точки: $A(0; 1)$, $B(4; 3)$, $C(1; 0)$.

$$\vec{BA}(-4; -2),$$

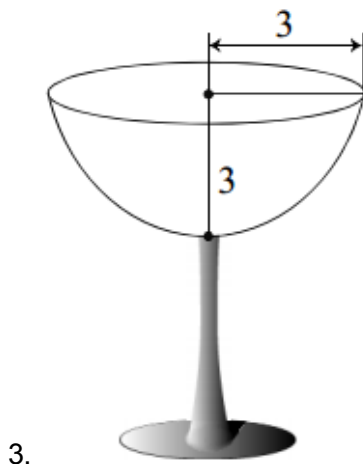
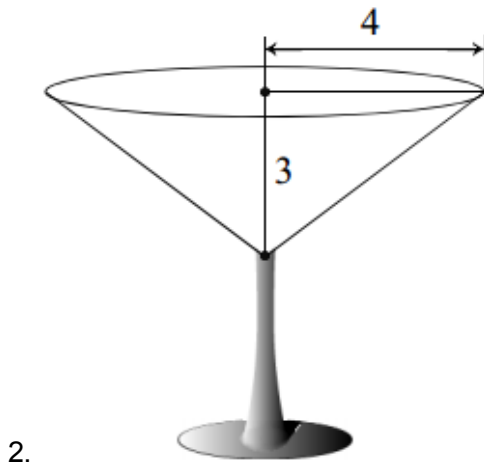
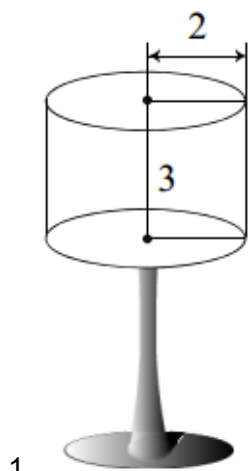
$$\vec{BC}(-3; -3).$$

Скористаємось тим, що скалярний добуток векторів $\vec{a}(x_a; y_a)$ і $\vec{b}(x_b; y_b)$ дорівнює
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$.

Тоді

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -4 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-3) = 12 + 6 = 18.$$

Укажіть номер фужера, у який можна налити НАЙБІЛЬШЕ рідини.



Ви відповіли правильно: 3

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

Найбільшу кількість рідини можна налити в той фужер, який має найбільший об'єм.

1) Кількість рідини, яка поміститься в 1-ому фужері, чисельно рівна об'єму циліндра з радіусом основи $r = 2$ і висотою $h = 3$. Об'єм циліндра дорівнює

$$V_{\text{циліндра}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 12\pi \text{ (куб. од.)}.$$

2) Кількість рідини, яка поміститься в 2-ому фужері, чисельно рівна об'єму конуса з радіусом основи $r = 4$ і висотою $h = 3$. Об'єм циліндра дорівнює

$$V_{\text{циліндра}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 16\pi \text{ (куб. од.)}.$$

3) Кількість рідини, яка поміститься в 3-ому фужері, чисельно рівна об'єму півкулі з радіусом $r = 3$. Об'єм півкулі дорівнює

$$V_{\text{півкулі}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 3^3 = \frac{2 \cdot 27}{3}\pi = 18\pi \text{ (куб. од.)}.$$

Отже, найбільшу кількість рідини можна налити в 3-й фужер.

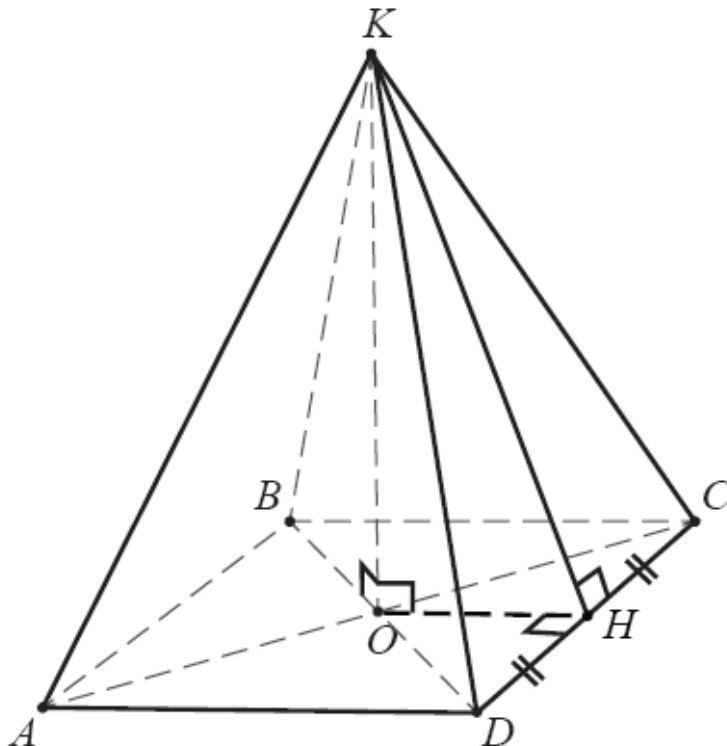
36

Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 3 см. Апофема утворює з площиною основи кут 60° . Обчисліть площу бічної поверхні піраміди (у см^2).

Ви відповіли правильно: 24

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)



Нехай задано правильну чотирикутну піраміду $KABCD$. Тобто, $ABCD$ — квадрат. KO — висота піраміди. O — точка перетину діагоналей квадрата $ABCD$. $KO = 3$ см. KH — апофема, тоді, $KH \perp DC$.

Маємо: KO — перпендикуляр до площини основи, KH — похила, OH — її проекція на основу.

Тоді $\angle KHO$ — це кут між апофемою KH і площиною основи. $\angle KHO = 60^\circ$.

2) $\triangle KDC$ — рівнобедрений ($KD = KC$), тому KH є також його медіаною: $DH = HC$.

3) З теореми про три перпендикуляри слідує, що $OH \perp CD$.

4) $\triangle ACD \sim \triangle OCD$ як прямокутні зі спільним кутом C . Тоді

$$\frac{AD}{OH} = \frac{CD}{CH} = \frac{2}{1}.$$

Звідси $AD = 2OH$,

$CD = AD$, отже, $CD = 2OH$.

5) з $\triangle KOH$ ($\angle O = 90^\circ$) маємо:

$$\frac{KO}{OH} = \operatorname{tg} \angle KHO = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$\text{звідки } OH = \frac{KO}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ см.}$$

Тоді $CD = 2\sqrt{3}$ см.

$KH = 2OH = 2\sqrt{3}$ см (бо катет навпроти кута 30° дорівнює половині гіпотенузи, а в нас катет OH лежить навпроти $\angle OKH$, рівного 30°).

6) Площа бічної поверхні піраміди дорівнює сумі площ її чотирьох бічних граней. Оскільки бічні грані правильної піраміди рівні, то маємо

$$\begin{aligned} S_{\text{бічної поверхні піраміди}} &= 4 \cdot S_{\triangle DKC} = 4 \cdot \frac{1}{2} KH \cdot CD = 2KH \cdot CD = \\ &= 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 24 \text{ см}^2. \end{aligned}$$