

Тест ЗНО з математики.

Результат

100% :)

Тестовий бал ?

52 із 52

Рейтинговий бал ?

200.0

Витрачено часу: 4 хвилини

[Ще раз](#) [Інший варіант](#) [Статистика](#)

Поділитися...

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

36

Якщо $\log_b a = c$ для будь-яких a , b і c , таких, що $a > 0$, $b > 0$ і $b \neq 1$, то справедлива рівність:

А $a = c^b$

Б $b = a^c$

В $a = b^c$

Г $c = a^b$

Д $c = b^a$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Логарифмом додатного числа a з основою b , де $b > 0$, $b \neq 1$, називають показник степеня, до якого треба піднести число b , щоб одержати число a . Тому $a = b^c$.

1

Корінь рівняння $(1,8 - 6x) : 9 = -\frac{19}{15}$ дорівнює:

2

- ☐ А $-2,2$
- ☐ Б $-1,1$
- ☐ В $1,1$
- ☒ Г $2,2$
- ☐ Д $4,4$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$(1,8 - 6x) \div 9 = -\frac{19}{15}.$$

Домножимо обидві сторони рівняння на 9.

$$1,8 - 6x = -\frac{19 \cdot 9}{15} = -\frac{19 \cdot 3}{5} = -\frac{57}{5} = -11,4.$$

$$\text{Тоді } -6x = -11,4 - 1,8$$

$$-6x = -13,2$$

$$6x = 13,2$$

$$x = 13,2 \div 6,$$

$$x = 2,2.$$

3

Якщо $y = \frac{x^2}{z}$ (де $x \neq 0$, $z \neq 0$), то $\frac{1}{x^2} =$

- ☐ А $yz.$
- ☐ Б $\frac{y}{z}.$
- ☐ В $\frac{z}{y}.$
- ☐ Г $y - \frac{1}{z}.$
- ☒ Д $\frac{1}{yz}.$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Якщо $y = \frac{x^2}{z}$ (де $x \neq 0$, $z \neq 0$), то: $x^2 = yz$. Тоді $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{yz}$.

4

Як зміниться величина дробу, якщо чисельник збільшити на 100 %, а знаменник зменшити на 50 %?

- ☐ А зменшиться в 4 рази
- ☐ Б зменшиться в 2 рази
- ☐ В збільшиться в 1,5 рази
- ☐ Г збільшиться в 2 рази
- ☒ Д збільшиться в 4 рази

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Розглянемо дріб $\frac{a}{b}$.

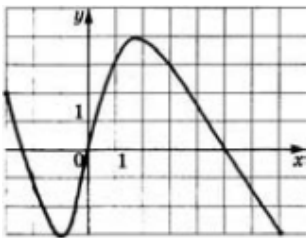
Якщо чисельник збільшити на 100 % (тобто, збільшити вдвічі), а знаменник зменшити на 50 % (тобто, зменшити вдвічі), одержимо: $\frac{2a}{\frac{1}{2}b} = 4 \frac{a}{b}$.

Значить, початковий дріб збільшиться в 4 рази.

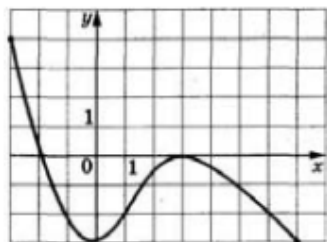
5

Укажіть рисунок, на якому функція, що задана графіком, зростає на проміжку $[0; 4]$.

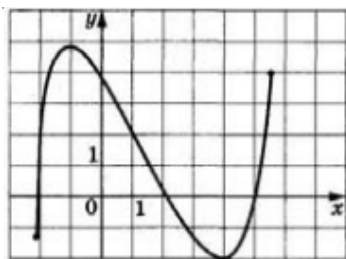
А



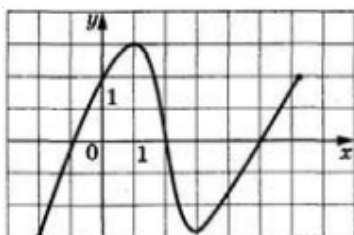
Б



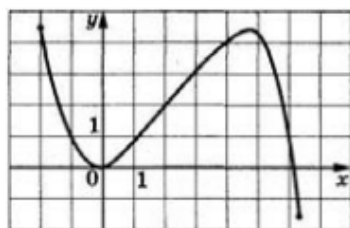
В



Г



Д



Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Нехай функція $f(x)$ визначена у всіх точках деякої множини A . Функція $f(x)$ називається зростаючою на множині A , якщо для будь-яких двох значень аргументу X_1 і X_2 з множини A , таких, що $X_1 < X_2$, виконується нерівність $f(X_1) < f(X_2)$.

Перевіримо для кожного із заданих малюнків, чи виконується це твердження на проміжку $[0; 4]$.

1) Нехай $X_1 = 2$, $X_2 = 3$. Бачимо, що $f(2) < f(3)$, отже, функція $f(x)$ не є зростаючою на проміжку $[0; 4]$.

2) Нехай $X_1 = 3$, $X_2 = 4$. Бачимо, що $f(3) > f(4)$, отже, функція $f(x)$ не є зростаючою на проміжку $[0; 4]$.

3-4) Нехай $X_1 = 1$, $X_2 = 2$. Бачимо, що $f(1) > f(2)$, отже, функція $f(x)$ не є зростаючою на проміжку $[0; 4]$.

5) Бачимо, що зі зростанням аргументу для всіх x з проміжку значення функції також зростає. Тобто, функція $f(x)$ зростає на проміжку $[0; 4]$.

6

Кількість коренів рівняння $(x^2 - 16)\sqrt{x - 1}\sqrt{x - 3} = 0$ дорівнює:

- ☐ А 1
- ☒ Б 2
- ☐ В 3
- ☐ Г 4
- ☐ Д рівняння не має коренів

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$(x^2 - 16)\sqrt{x - 1}\sqrt{x - 3} = 0.$$

$$\begin{cases} x^2 - 16 = 0, \\ x - 1 = 0, \\ x - 3 = 0, \end{cases}$$

за умови, що $\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ x - 3 \geq 0. \end{cases}$

Тобто,

$$\begin{cases} x = \pm 4, \\ x = 1, \\ x = 3, \end{cases}$$

за умови, що $x \geq 3$.

-4 і 1 не належать проміжку $[3; +\infty)$.

Тому маємо два корені: $x = 3$; $x = 4$.

7

Знайдіть значення виразу $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{4}{3}}}$, якщо $a = 5$.

☐ А $5^{-\frac{1}{2}}$

☐ Б $5^{-\frac{2}{3}}$

☒ В 25

☐ Г $\frac{1}{25}$

☐ Д $5^{-\frac{8}{9}}$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{4}{3}}} = a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{4}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2.$$

Якщо $a = 5$, то $a^2 = 5^2 = 25$.

8

Розв'яжіть нерівність $0,7^{3x-1} > 0,49$.

☒ А $(-\infty; 1)$

☐ Б $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$

☐ В $(1; +\infty)$

☐ Г $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$

☐ Д інша відповідь

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$(0,7)^{3x-1} > 0,49,$$

$$(0,7)^{3x-1} > (0,7)^2.$$

Оскільки основа степенів $(0,7)^{3x-1}$; $(0,7)^2$ менша за одиницю, то остання нерівність рівносильна такій:

$$3x - 1 < 2.$$

$$\text{Звідси } 3x < 3, x < 1.$$

$$\text{Отже, } x \in (-\infty; 1).$$

9

Задано функції: 1) $y = x - 2$; 2) $y = \sqrt{(x - 2)^2}$; 3) $y = (\sqrt{x - 2})^2$.

Укажіть правильне твердження.

- ☐ А графіки всіх функцій співпадають
- ☐ Б співпадають тільки графіки першої і другої функцій
- ☐ В співпадають тільки графіки першої і третьої функцій
- ☐ Г співпадають тільки графіки другої і третьої функцій
- ☒ Д графіки всіх функцій різні

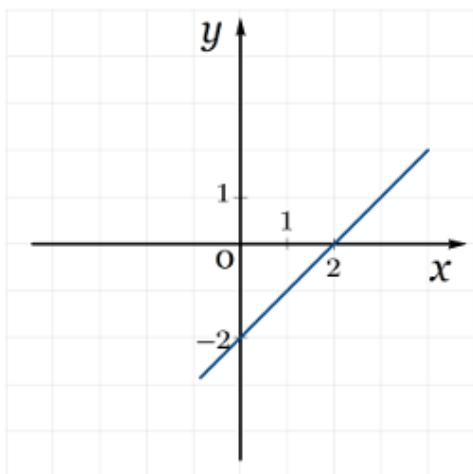
Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

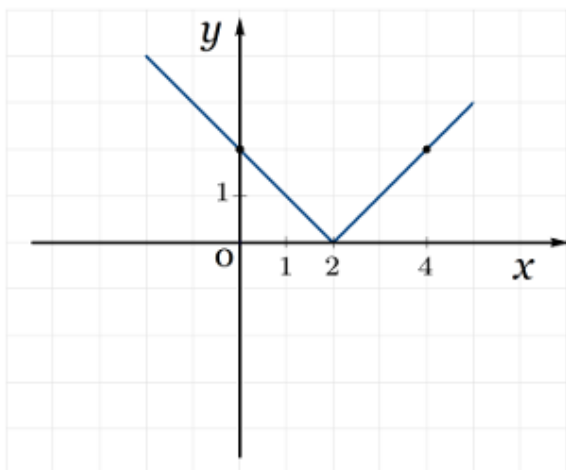
[Приховати пояснення](#)

Зобразимо графіки заданих функцій в прямокутній системі координат.

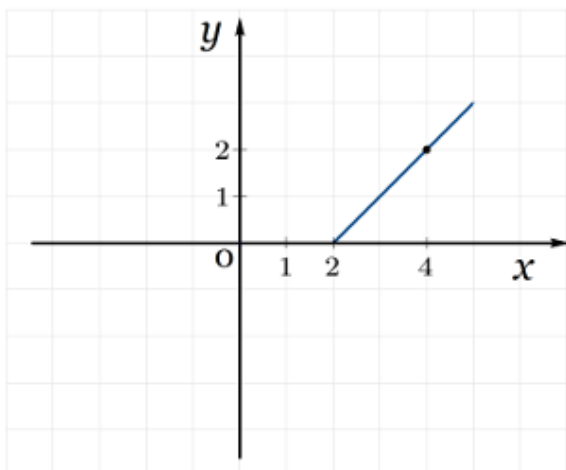
1) $y = x - 2$. Тут $D(y) = \mathbb{R}$.



2) $y = \sqrt{(x - 2)^2} = |x - 2|$. Тут $D(y) = \mathbb{R}$.



3) $y = (\sqrt{(x-2)})^2 = x - 2$ за умови, що $x \geq 2$.



Отже, графіки всіх функцій різні.

10

Знайдіть значення виразу $5 \cos^2 x - 1$, якщо $\sin^2 x = 0,4$.

- ☒ А 2
- ☐ Б $-0,2$
- ☐ В -2
- ☐ Г 1
- ☐ Д інша відповідь

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$5 \cos^2 x - 1 = 5(1 - \sin^2 x) - 1 = 5 - 5 \sin^2 x - 1 = -5 \sin^2 x + 4.$$

$$\text{Якщо } \sin^2 x = 0,4, \text{ то: } -5 \sin^2 x + 4 = -5 \cdot 0,4 + 4 = -2 + 4 = 2.$$

Розв'яжіть рівняння $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$.

- ☐ А $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- ☐ Б $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- ☒ В $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- ☐ Г $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- ☐ Д інша відповідь

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}.$$

Так як $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, то одержимо:

$$\cos 2x = \frac{1}{2},$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Знайдіть значення виразу $x^2 - 4x + 4$, якщо $x = 2 - \sqrt{5}$.

- ☐ А -5
- ☒ Б 5
- ☐ В $13 - 4\sqrt{5}$
- ☐ Г $13 + 4\sqrt{5}$
- ☐ Д інша відповідь

Ви відповіли правильно

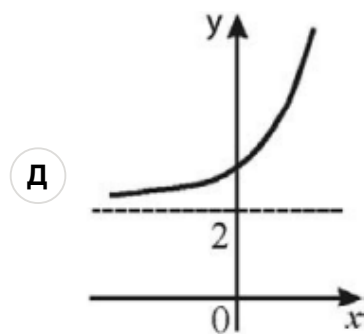
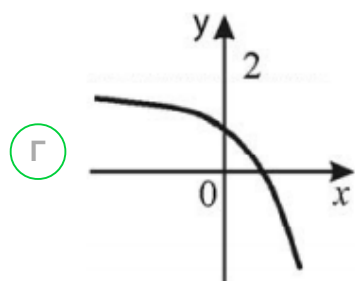
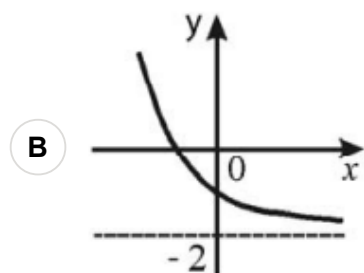
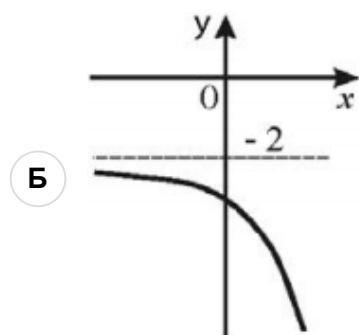
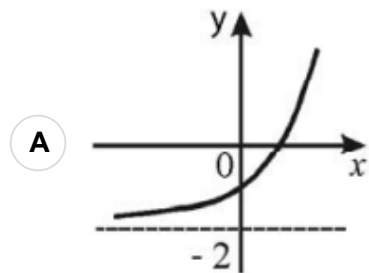
Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2.$$

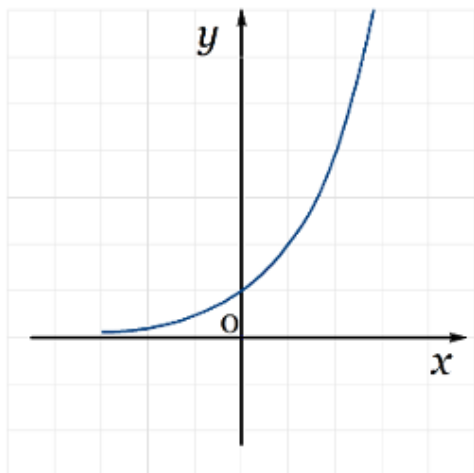
Якщо $x = 2 - \sqrt{5}$, то: $(x - 2)^2 = (2 - \sqrt{5} - 2)^2 = (-\sqrt{5})^2 = 5$.

Серед наведених графіків укажіть графік функції $y = 2 - 2^x$.



[Приховати пояснення](#)

Зобразимо схематично графік функції $y = 2^x$.



Графік функції $y = -2^x$ симетричний графіку функції $y = 2^x$ відносно осі Ox .

Графік функції $y = 2 - 2^x = -2^x + 2$ одержимо паралельним перенесенням на 2 одиниці вгору вздовж осі Oy .

Тоді одержимо графік, зображений на четвертому малюнку.

14

До графіка функції $y = -0,5x^2$ проведено дотичну у точці з абсцисою $x_0 = -3$. Обчисліть тангенс кута нахилу цієї дотичної до додатного напрямку осі абсцис.

- ☐ А $-4,5$
- ☐ Б -3
- ☐ В 0
- ☒ Г 3
- ☐ Д $4,5$

[Приховати пояснення](#)

Тангенс кута нахилу дотичної до додатного напрямку осі абсцис дорівнює значенню похідної функції, до графіка якої проведено дотичну, в точці дотику. За умовою функція $y = -0,5x^2$. Точка дотику $x_0 = -3$.

Знайдемо похідну заданої функції при $x = -3$.

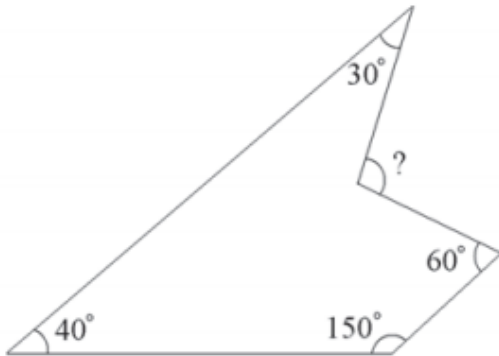
$$y' = (-0,5x^2)' = -0,5 \cdot 2x = -x;$$

$$y'(-3) = -(-3) = 3.$$

Отже, шуканий тангенс кутанахилу дотичної дорівнює 3.

15

Визначте зовнішній кут многокутника.

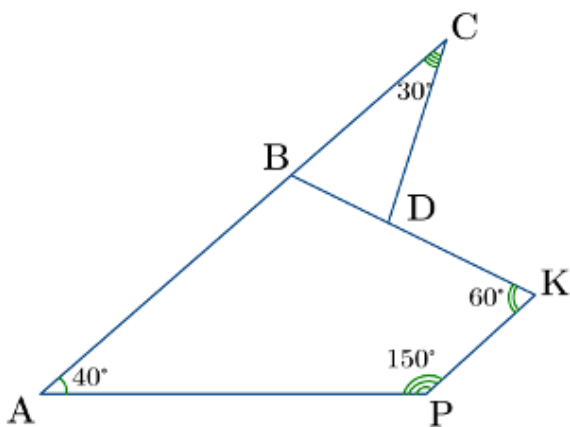


- ☐ А 120°
- ☐ Б 110°
- ☐ В 90°
- ☐ Г 95°
- ☒ Д 100°

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)



Чотирикутник $ABKP$ — опуклий. Сума його кутів 360° .

Значить, $\angle ABK = 360^\circ - 40^\circ - 150^\circ - 60^\circ = 360^\circ - 250^\circ = 110^\circ$.

Кут CBK - суміжний з кутом ABK . Тому $\angle CBK = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

Сума кутів трикутника 180° . Тоді в

$\triangle BCD$: $\angle BDC = 180^\circ - 70^\circ - 30^\circ = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

Кут CDK суміжний з кутом BDC . Тому $\angle CDK = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо радіус кола, описаного навколо нього, дорівнює 5 см, а один із катетів — 6 см.

- ☐ А 15 см^2
- ☒ Б 24 см^2
- ☐ В 30 см^2
- ☐ Г 48 см^2
- ☐ Д 60 см^2

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є серединою гіпотенузи. Тобто, гіпотенуза вдвічі більша за радіус описаного кола. Значить, її довжина дорівнює 10 см.

З теореми Піфагора знайдемо довжину другого катета:

$$\sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \text{ (см)}.$$

Дано точку $P(-1; 3; 5)$. Знайдіть координати точки Q , симетричної точці P відносно координатної площини yz .

- ☒ А $(1; 3; 5)$
- ☐ Б $(-1; -3; 5)$
- ☐ В $(-1; 3; -5)$
- ☐ Г $(1; -3; -5)$
- ☐ Д $(1; -3; 5)$

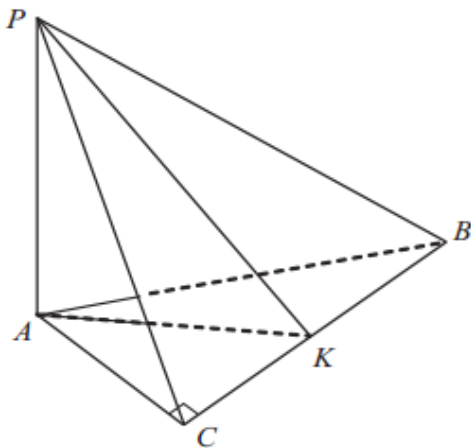
Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Точки $A(x; y; z)$ і $B(-x; y; z)$ симетричні відносно координатної площини YZ . Тоді точка $Q(1; 3; 5)$ симетрична точці $P(-1; 3; 5)$ відносно координатної площини YZ .

Визначте на рисунку лінійний кут двогранного кута з ребром BC , якщо у трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$ і $PA \perp (ABC)$.



- ☒ А $\angle PCA$
- ☐ Б $\angle PKA$
- ☐ В $\angle PBA$
- ☐ Г $\angle APK$
- ☐ Д інша відповідь

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Розглянемо заданий малюнок.

1) PA — перпендикуляр до площини основи, PC — похила, AC — її проекція на площину основи. Оскільки кут ACB — прямий, то за теоремою про три перпендикуляри $PC \perp BC$.

2) $BC \perp AC$, $BC \perp PC$, значить, $BC \perp (PAC)$ за ознакою перпендикулярності прямої і площини.

Тобто, площина PAC перпендикулярна до ребра BC даного в умові двогранного кута.

3) Площина PAC , перпендикулярна до ребра BC двогранного кута, перетинає його грані CPB і CAB по двох півпрямих: CP і CA відповідно.

Кут PCA , утворений цими півпрямими, за означенням є лінійним кутом заданого двогранного кута з ребром BC .

19

У коробці лежать різнокольорові кульки, з яких 40 — червоні, 20 — коричневі, а всі, що залишилися — жовті. З'ясуйте, скільки жовтих кульок лежить у коробці, якщо ймовірність вибору випадковим чином жовтої кульки дорівнює $\frac{1}{3}$.

- ☐ А 20
- ☒ Б 30
- ☐ В 60
- ☐ Г 120
- ☐ Д 180

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Нехай кількість жовтих кульок x .

Тоді всього кульок: $40 + 20 + x = 60 + x$.

Якщо ймовірність вибору випадковим чином жовтої кульки дорівнює $\frac{1}{3}$, то це означає, що:

$$\frac{x}{60 + x} = \frac{1}{3},$$

звідки $3x = 60 + x$,

$$2x = 60,$$

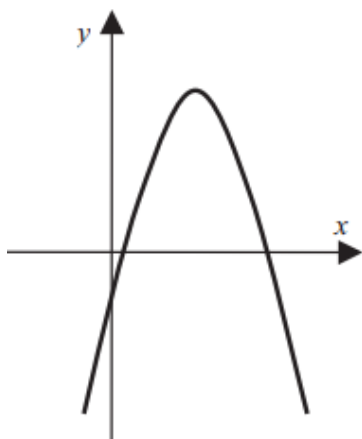
$$x = 60 \div 2,$$

$$x = 30.$$

Тобто, в коробці лежить 30 жовтих кульок.

20

За видом графіка функції $y = ax^2 + bx + c$ визначте знаки коефіцієнтів a , b , c . Оберіть правильне твердження.



А $\begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \\ c > 0 \end{cases}$

Б $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \\ c > 0 \end{cases}$

В $\begin{cases} a > 0, \\ b < 0, \\ c > 0 \end{cases}$

Г $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \\ c < 0 \end{cases}$

Д $\begin{cases} a < 0, \\ b > 0, \\ c < 0 \end{cases}$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

1) Вітки параболи, заданої рівнянням $y = ax^2 + bx + c$, направлені донизу. Отже, $a < 0$.

2) Абсциса x_b вершини параболи є додатньою. Тобто, $x_b = -\frac{b}{2a} > 0$. Тоді $\frac{b}{2a} < 0$.
Значить, $b > 0$.

3) Парабола перетинає вісь Oy у точці з від'ємною ординатою. Тобто, якщо $x = 0$, то $y < 0$.
Маємо: $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c < 0$.

Значить: $c < 0$.

Правильним є твердження:

$$\begin{cases} a < 0, \\ b > 0, \\ c < 0. \end{cases}$$

21

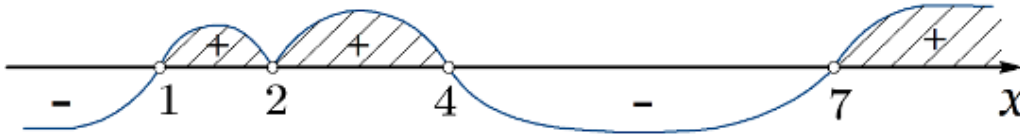
Укажіть число цілих розв'язків нерівності $\frac{(x-4)(x-1)}{(x-2)^2(x-7)} > 0$ на проміжку $[-20; 10]$.

Ви відповіли правильно: 4

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

$$\frac{(x-4)(x-1)}{(x-2)^2(x-7)} > 0.$$



Тут $x \in (1; 2) \cup (2; 4) \cup (7; +\infty)$.

На проміжку $[-20; 10]$ маємо такі цілі розв'язки: 3; 8; 9; 10. Всього їх чотири.

22

Знайдіть суму перших 11 членів арифметичної прогресії, знаючи, що її шостий член дорівнює 4.

Ви відповіли правильно: 44

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

1) Розглянемо арифметичну прогресію (a_n) , в якій шостий член дорівнює 4.

2) З формули n -го члена арифметичної прогресії $a_n = a_1 + d(n-1)$ маємо:

$$a_6 = a_1 + 5d = 4. \text{ Тобто, } a_1 = 4 - 5d.$$

$$3) a_{11} = a_6 + 5d = 4 + 5d.$$

4) За формулою суми n перших членів арифметичної прогресії $s_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n$ маємо:

$$S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = \frac{4 - 5d + 4 + 5d}{2} \cdot 11 = \frac{8}{2} \cdot 11 = 4 \cdot 11 = 44.$$

23

Знайдіть найменше значення функції $f(x) = 2|x-3| + |x+4|$.

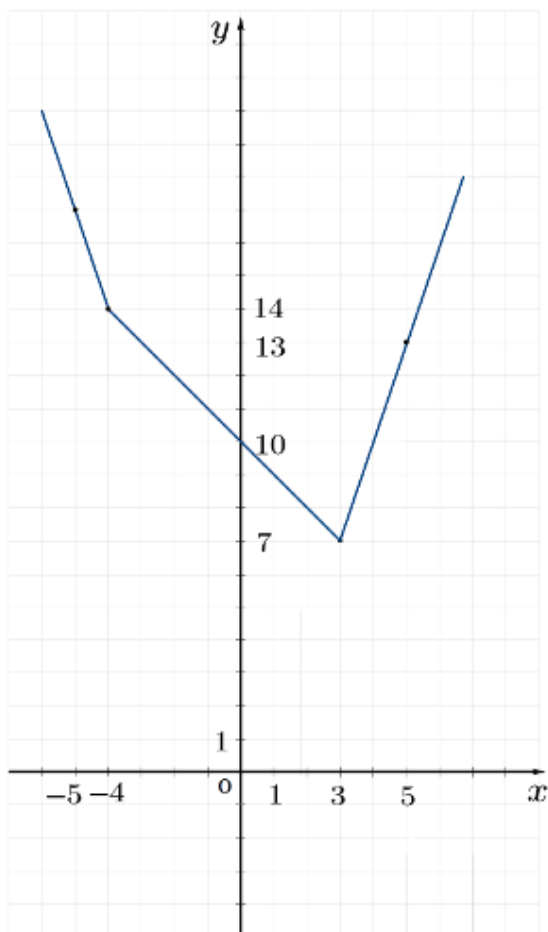
Ви відповіли правильно: 7

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

$$f(x) = 2|x-3| + |x+4| = \begin{cases} -3x + 2, & \text{якщо } x < -4, \\ -x + 10, & \text{якщо } -4 \leq x < 3, \\ 3x - 2, & \text{якщо } x \geq 3. \end{cases}$$

Побудуємо графік функції $f(x)$ в прямокутній системі координат.



Бачимо, що найменше значення функції $f(x)$ дорівнює 7.

24

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2x + 3^{y+1} = 11, \\ 3x + 2 \cdot 3^y = 9 \end{cases}$, та знайдіть суму $x_0 + y_0$ для одержаного розв'язку $(x_0; y_0)$ системи рівнянь.

Ви відповіли правильно: 2

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

$$\begin{cases} 2x + 3^{y+1} = 11, \\ 3x + 2 \cdot 3^y = 9, \end{cases}$$

Відніmemo почленно від другого рівняння перше. Одержимо:

$$3x - 2x + 2 \cdot 3^y - 3 \cdot 3^y = 9 - 11.$$

$$x - 3^y = -2;$$

$$3^y = x + 2.$$

Тоді система набере вигляду:

$$\begin{cases} 3^y = x + 2, \\ 3x + 2 \cdot 3^y = 9, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^y = x + 2, \\ 3x + 2 \cdot (x + 2) = 9, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^y = x + 2, \\ 3x + 2x + 4 = 9, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^y = x + 2, \\ 5x = 5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^y = x + 2, \\ x = 1. \end{cases}$$

Тоді:

$$\begin{cases} 3^y = 1 + 2 = 3, \\ x = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^y = 3^1, \\ x = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1, \\ x = 1. \end{cases}$$

Тоді шукана сума дорівнює: $1 + 1 = 2$.

25

Швидкість товарного потяга 60 км/год. Якою є його довжина (у м), якщо відомо, що він проходить повз нерухомого спостерігача за 15 секунд?

Ви відповіли правильно: 250

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

$$1) 60 \text{ км/год} = 60000 \text{ м/год} = \frac{60000}{60} \text{ м/хв} = 1000 \text{ м/хв.}$$

$$2) 15 \text{ с} = \frac{1}{4} \text{ хв.}$$

$$3) \text{ Тоді довжина потяга: } 1000 \text{ м/хв} \cdot \frac{1}{4} \text{ хв} = 250 \text{ м.}$$

26

Обчисліть значення виразу $5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5}}$.

Ви відповіли правильно: 9

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

$$5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5}} = 5^{4 \log_5 \sqrt{3}} = 5^{4 \log_5 (\sqrt{3})^4} = (\sqrt{3})^4 = 9.$$

27

Визначте кількість цілих розв'язків нерівності $\log_{90}(x - 10) + \log_{90}(x - 11) \leq 1$.

Ви відповіли правильно: 9

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

$$\log_{90}(x - 10) + \log_{90}(x - 11) \leq 1.$$

$$\begin{cases} x - 10 > 0, \\ x - 11 > 0, \\ \log_{90}(x - 10)(x - 11) \leq 1, \end{cases}$$

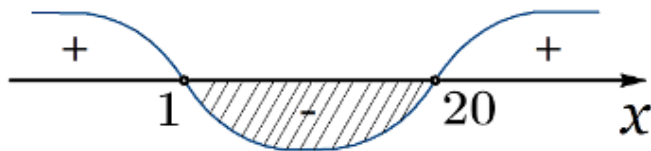
$$\begin{cases} x > 10, \\ x > 11, \\ \log_{90}(x - 10)(x - 11) \leq \log_{90} 90, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 11, \\ (x - 10)(x - 11) \leq 90, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 11, \\ x^2 - 21x + 110 - 90 \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 11, \\ x^2 - 21x + 20 \leq 0, \end{cases}$$

Коренями квадратного тричлена $x^2 - 21x + 20$ є числа 1 і 20, тому нерівність $x^2 - 21x + 20 \leq 0$ рівносильна нерівності $(x - 1)(x - 20) \leq 0$.



Тут $x \in [1; 20]$. Оскільки має виконуватися ще й умова $x > 11$, то остаточно одержимо проміжок: $(11; 20]$.

Значить, цілими розв'язками даної в умові нерівності є числа: 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 всього дев'ять.

28

Обчисліть значення виразу $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$.

Ви відповіли правильно: 2

Бали: 2 із 2

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} &= \frac{\cos \frac{\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{8}} - \frac{\sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{8}} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}} = \frac{\cos(2 \cdot \frac{\pi}{8})}{\frac{1}{2} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}} = \\ &= \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot \frac{\pi}{8}} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 2 \cdot 1 = 2.\end{aligned}$$

29

Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 - 5} + \sqrt{x^2 + 7} = 15 - x^2$ та запишіть у відповіді найменший корінь.

Ви відповіли правильно: -3

Бали: 2 із 2

Приховати пояснення

$$\sqrt{x^2 - 5} + \sqrt{x^2 + 7} = 15 - x^2.$$

1) Знайдемо область допустимих значень змінної x .

$$\begin{cases} x^2 - 5 \geq 0, \\ x^2 + 7 \geq 0, \\ 15 - x^2 \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \geq 5, \\ x^2 \geq -7, \\ x^2 \leq 15, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \geq 5, \\ x^2 \leq 15. \end{cases}$$

Тобто, $5 \leq x^2 \leq 15$, значить, $x \in [-\sqrt{15}; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; \sqrt{15}]$.

2) На області допустимих значень змінної x розглянемо функції:

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{x^2 - 5}, \\ g(x) &= \sqrt{x^2 + 7}, \\ h(x) &= 15 - x^2.\end{aligned}$$

3) Знайдемо похідні цих функцій при $x \in (-\sqrt{15}; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; \sqrt{15})$.

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 - 5})' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 5}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}.$$

$$g'(x) = (\sqrt{x^2 + 7})' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 7}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 7}}.$$

$$h'(x) = (15 - x^2)' = -2x.$$

4) Якщо $x \in (-\sqrt{15}; -\sqrt{5})$, то:

$$f'(x) < 0, g'(x) < 0, h'(x) > 0.$$

Значить, на проміжку $[-\sqrt{15}; -\sqrt{5}]$ функції $f(x)$ і $g(x)$ є спадними, а функція $h(x)$ є зростаючою.

5) Оскільки на проміжку $[-\sqrt{15}; -\sqrt{5}]$ функції $f(x)$ і $g(x)$ спадними, то функція $y = f(x) + g(x)$ є спадною на цьому проміжку.

6) Тоді рівняння $f(x) + g(x) = h(x)$ на заданому в умові проміжку $[-\sqrt{15}; -\sqrt{5}]$ має не більше одного кореня. Підстановкою переконуємося, що цей корінь $x = -3$.

7) Якщо $x \in (\sqrt{5}; \sqrt{15})$, то:

$$f'(x) > 0, g'(x) > 0, h'(x) < 0.$$

Значить, на проміжку $[\sqrt{5}; \sqrt{15}]$ функції $f(x)$ і $g(x)$ є зростаючими, а функція $h(x)$ є спадною.

8) Оскільки на проміжку $[\sqrt{5}; \sqrt{15}]$ функції $f(x)$ і $g(x)$ зростаючі, то функція $y = f(x) + g(x)$ є зростаючою на цьому проміжку.

9) Тоді рівняння $f(x) + g(x) = h(x)$ на проміжку $[\sqrt{5}; \sqrt{15}]$ має не більше одного кореня. Підстановкою переконуємося, що цей корінь $x = 3$.

10) Ми одержали два корені заданого в умові рівняння: $x = -3$; $x = 3$. Меншим серед них є $x = -3$.

30

Обчисліть значення похідної функції $f(x) = 4x \ln x + 5$ при $x = e$.

Ви відповіли правильно: 8

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

$$f(x) = 4x \ln x + 5.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x \ln x + 5)' = (4x \ln x)' + 5' = 4(x \ln x)' + 0 = 4(x' \ln x + x(\ln x)') = \\ &= 4(1 \ln x + x \frac{1}{x}) = 4(\ln x + 1). \end{aligned}$$

$$f'(e) = 4(\ln e + 1) = 4 \cdot (1 + 1) = 4 \cdot 2 = 8.$$

31

Знайдіть найбільше значення функції $f(x) = x^3 - 12x$ на відріжку $[-3; 1]$.

Ви відповіли правильно: 16

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

$$f(x) = x^3 - 12x.$$

1) Маємо: $f'(x) = 3x^2 - 12$. $D(f) = R$.

2) Знайдемо критичні точки даної функції. Для цього розв'яжемо рівняння:

$$3x^2 - 12 = 0,$$

$$x^2 - 4 = 0,$$

$$x^2 = 4, x = \pm 2.$$

Отже, точки $x = \pm 2$ є критичними точками функції $f(x)$.

З них проміжку $[-3; 1]$ належить точка $x = -2$.

3) $f(-3) = (-3)^3 - 12 \cdot (-3) = -27 + 36,$

$$f(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) = -8 + 24 = 16.$$

$$f(1) = 1^3 - 12 \cdot 1 = 1 - 12 = -11.$$

Отже, $\max f(x) = f(-2) = 16$. $[-3; 1]$.

32

Знайдіть найменший натуральний розв'язок нерівності $|\sin x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ви відповіли правильно: 3

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

$$|\sin x| < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тоді: $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Виділимо на одиничному колі множину точок, ординати яких належать проміжку

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Враховавши, що найменший додатний період функції $y = \sin x$ дорівнює 2π і те, що точки одиничного кола, які відповідають кутам $\frac{\pi}{4}$ і $\frac{5\pi}{4}$ та $-\frac{\pi}{4}$ і $\frac{3\pi}{4}$ симетричні відносно початку координат, запишемо множину розв'язків даної нерівності:

$$\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$$

Виконаємо обчислення:

$$\frac{\pi}{4} \approx \frac{3,14}{4} < 1,$$

$$\frac{3\pi}{4} \approx \frac{3 \cdot 3,14}{4} = \frac{9,42}{4} > 2,$$

$$\frac{5\pi}{4} \approx \frac{5 \cdot 3,14}{4} = \frac{15,7}{4} > 3.$$

Отже, число 3 належить проміжку $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right)$.

Воно є найменшим натуральним розв'язком заданої нерівності.

33

Знайдіть найбільше значення параметра a , при якому система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ |x| + y = a \end{cases}$ має розв'язком точно 2 пари чисел $(x_0; y_0)$.

Ви відповіли правильно: 4

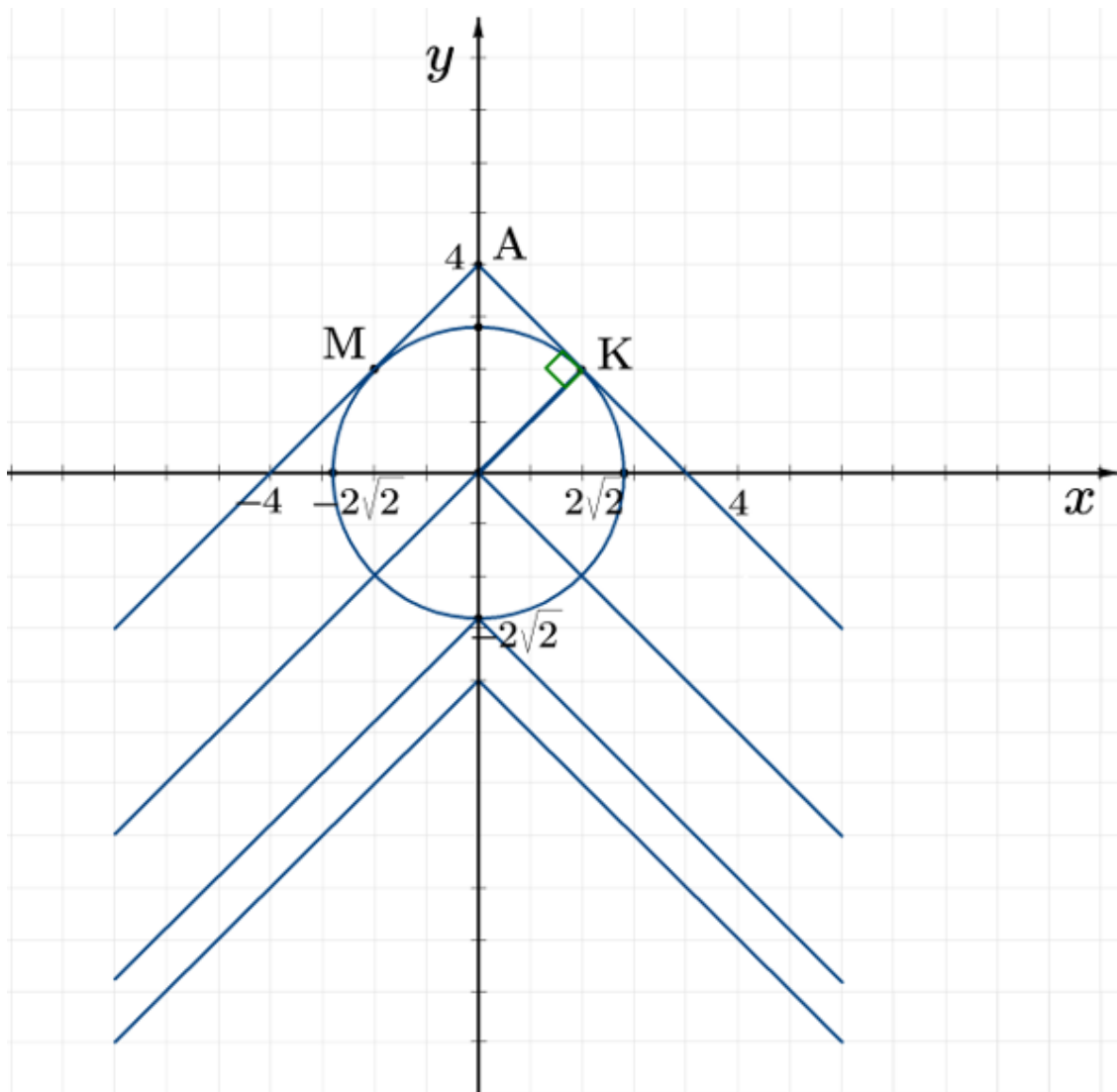
Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ |x| + y = a, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ y = -|x| + a. \end{cases}$$

Зобразимо в одній системі координат графіки обох рівнянь системи. Графіком першого рівняння є коло з центром в початку координат і радіусом $R = 2\sqrt{2}$.

Графік функції $y = -|x| + a$ одержуємо з графіка функції $y = -|x|$ паралельним перенесенням на a одиниць вздовж осі ординат.



Дана система в розв'язку точно матиме дві пари чисел, якщо графіки заданих в системі рівнянь точно матимуть дві точки перетину.

З малюнка бачимо, що це буде за умови, що $a \in (-2\sqrt{2}; 4]$ (тоді графіки мають 2, 3 або 4 точки перетину).

Пояснимо, чому число 4 є найбільшим значенням параметра a , за якого графіки мають дві спільні точки. Розглянемо $\triangle AOB$. $OA = OB$, $\angle O = 90^\circ$, тобто він прямокутний рівнобедрений.

AB — дотична до кола в точці O . OK — висота, проведена до гіпотенузи AB .

Крім того, OK — медіана, а значить, $AB = 2OK = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

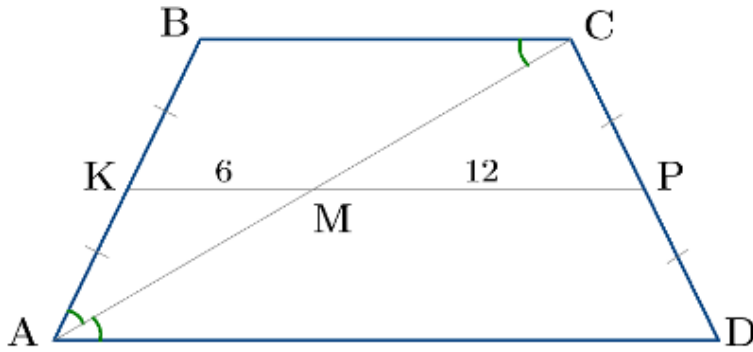
За теоремою Піфагора з $\triangle AOB$ маємо:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 2 \cdot OA^2 = (4\sqrt{2})^2.$$

$$2 \cdot OA^2 = 16 \cdot 2 = 32.$$

$$OA^2 = 32 \div 2 = 16, \text{ звідки } OA = 4.$$

У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута і ділить середню лінію трапеції на відрізки довжиною 6 см і 12 см. Обчисліть периметр трапеції, у см.



1) Нехай задано трапецію $ABCD$. $AB = CD$, $AD \parallel BC$, $BC < AD$. KP - середня лінія трапеції. Діагональ AC перетинає KP в точці M .

2) Розглянемо кут BAC .

$BK = AK$; $BC \parallel KM$ (бо середня лінія трапеції паралельна основам). Тоді за теоремою Фалеса $CM = AM$. Тобто, точка M — середина AC .

Тоді KM і PM — середні лінії трикутників ABC і CAD за означенням.

3) За властивістю середньої лінії трикутника:

$$KM = \frac{1}{2}BC, PM = \frac{1}{2}AD.$$

Оскільки $BC < AD$, то $KM < PM$.

Тоді з умови слідує, що $KM = 6$ см, $PM = 12$ см.

Отже, $BC = 12$ см, $AD = 24$ см.

4) Діагональ AC є бісектрисою гострого кута A .

Тобто, $\angle BAC = \angle DAC$.

$\angle BCA = \angle DAC$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих BC і AD та січній AC .

Значить, $\angle BAC = \angle BCA$.

Тоді $\triangle ABC$ — рівнобедренний за ознакою. Тоді $AB = BC = 12$ см.

Оскільки трапеція рівнобічна, то $CD = 12$ см.

5) Периметр P_{ABCD} трапеції:

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 2AB + BC + AD = 2 \cdot 12 + 12 + 24 = 60 \text{ см.}$$

Прямокутний паралелепіпед з довжиною ребер 5 см, 7 см і 9 см складено з кубиків з довжиною ребра 1 см. Скільки доведеться забрати кубиків, щоб вилучити весь зовнішній шар товщиною в один кубик?

Ви відповіли правильно: 210

Бали: 2 із 2

У даному прямокутному паралелепіпеді маємо три пари рівних граней і прямокутників:

- грань, в якій 5 кубиків в ширину і 7 кубиків в довжину, всього в грані 35 кубиків;
- грань, в якій 5 кубиків в ширину і 9 кубиків в довжину, всього в грані 45 кубиків;
- грань, в якій 7 кубиків в ширину і 9 кубиків в довжину, всього в грані 63 кубика.

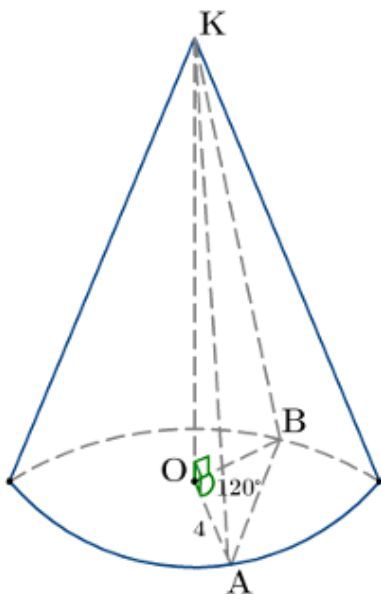
36

Через вершину конуса з радіусом основи 4 см проведено площину, що перетинає його основу по хорді, яку видно з центра основи конуса під кутом 120° , а з вершини конуса — під кутом 90° . Обчисліть площу перерізу, у см^2 .

Ви відповіли правильно: 12

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)



1) Нехай задано конус з вершиною в точці K і основою з радіусом 4 см. A і B — точки кола основи.

AKB — переріз конуса площиною, що проходить через вершину K і хорду AB . Це $\triangle AKB$. Точка O — центр основи конуса. Тоді $OA = OB = 4$ см.

$\angle AOB = 120^\circ$, $\angle AKB = 90^\circ$ за умовою.

2) з $\triangle AOB$ за теоремою косинусів маємо:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB.$$

$$AB^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = 16 + 16 - 32 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 16 + 16 + 16 = 48.$$

3) $\triangle AKB$ — рівнобедренний (бо $AK = BK$ як твірні конуса) і прямокутний (за умовою) з гіпотенузою AB . За теоремою Піфагора $AB^2 = AK^2 + BK^2 = 2AK^2$.

$$AK^2 = \frac{AB^2}{2} = \frac{48}{2} = 24.$$

4) Знайдемо площу S_{AKB} трикутника AKB :

$$S_{AKB} = \frac{1}{2} AK \cdot BK = \frac{AK^2}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ (cm}^2\text{)}.$$