

Тест ЗНО з математики. |

Результат

100% :)

Тестовий бал ?

47 із 47

Рейтинговий бал ?

200.0

Витрачено часу: 12 хвилин

[Ще раз](#) [Інший варіант](#) [Статистика](#)

Поділитися...

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

36

1

У коробці лежить не більше 50 цукерок. Цукерки можна порівну розділити між двома або трьома дітьми, але не можна між чотирма. Укажіть, яка найбільш можлива кількість цукерок може знаходитись у коробці.

А 42

Б 44

В 46

Г 48

Д 50

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Серед наведених відповідей на 3 без остачі діляться тільки числа 42 і 48, при цьому число 48 ділиться на 4, що не відповідає умові задачі. Отже, у коробці може знаходитись 42 цукерки.

2

Визначте, на скільки $\frac{2}{3}$ числа 450 більше за 0,15 числа 480.

- ☐ А 118
- ☐ Б 150
- ☒ В 228
- ☐ Г 300
- ☐ Д 372

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$\frac{2}{3} \cdot 450 = 300,$$

$$0,15 \cdot 480 = 72, \text{ їх різниця дорівнює } 300 - 72 = 228.$$

3

Кількість дівчат у класі складає 60% від кількості хлопців. Знайдіть, який відсоток усіх учнів складають хлопці.

- ☐ А 60%
- ☒ Б 62,5%
- ☐ В 75%
- ☐ Г 85%
- ☐ Д 95,2%

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Нехай кількість хлопців у класі становить x . Тоді кількість дівчат — $0,6x$. Отже, всього у класі $x + 0,6x = 1,6x$ учнів. З них хлопці складають $\frac{x}{1,6x} \cdot 100 \% = 62,5 \%$.

4

Дано 25 чисел. Серед них число 9 зустрічається 12 разів, число 8 зустрічається 9 разів, а число 15—4 рази. Знайдіть їх середнє арифметичне.

- ☐ А 13,4
- ☐ Б 12
- ☐ В 11
- ☐ Г 10,2
- ☒ Д 9,6

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Сума даних чисел $12 \cdot 9 + 9 \cdot 8 + 4 \cdot 15 = 108 + 72 + 60 = 240$, отже, їх середнє арифметичне дорівнює $\frac{240}{25} = 9,6$.

5

Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2 - 6x + 5}{x - 1} \leq 0$

- ☐ А $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$
- ☐ Б $(1; 5]$
- ☒ В $(-\infty; 1) \cup (1; 5]$
- ☐ Г $(-\infty; 5]$
- ☐ Д $[5; +\infty)$

Ви відповіли правильно

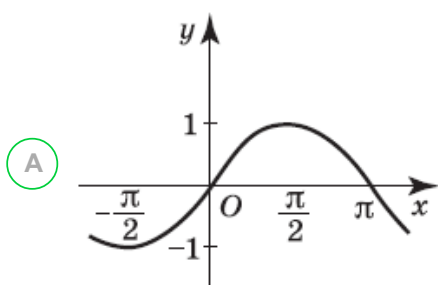
Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

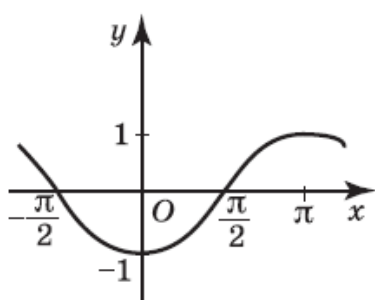
$\frac{(x - 5)(x - 1)}{x - 1} \leq 0, \quad \begin{cases} x - 5 \leq 0, \\ x \neq 1, \end{cases} \quad \text{звідки } x \in (-\infty; 1) \cup (1; 5].$

6

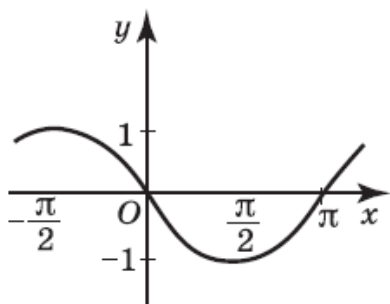
Укажіть, який з наведених графіків є графіком функції $y = \sin(x + 2\pi)$.



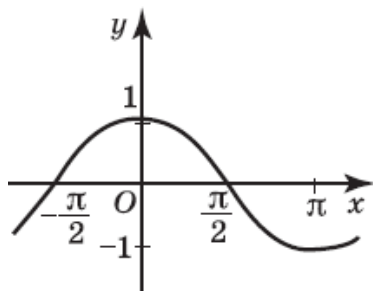
Б



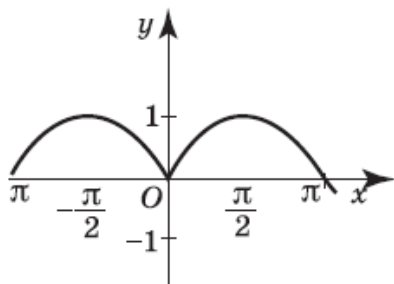
В



Г



Д



[Приховати пояснення](#)

Оскільки число 2π є періодом функції $\sin x$, то $y = \sin(x + 2\pi) = \sin x$. Синусоїда зображена на рис. А

7

Обчисліть $\frac{3^{-\frac{5}{3}} \cdot 81^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[3]{3}}$.

- ☐ А $\frac{1}{\sqrt{3}}$
- ☐ Б 9
- ☐ В $\frac{1}{3}$
- ☒ Г 3
- ☐ Д $\sqrt{3}$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$\frac{3^{-\frac{5}{3}} \cdot 81^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3^{-\frac{5}{3}} \cdot (3^4)^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{-\frac{5}{3}+3}}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 3^1 = 3.$$

8

Знайдіть значення виразу $\frac{4 \sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha + 4 \sin \alpha}$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}$.

- ☐ А $\frac{3}{13}$
- ☒ Б $\frac{11}{13}$
- ☐ В 3
- ☐ Г $-\frac{1}{3}$
- ☐ Д $\frac{4}{13}$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{3}$, звідки $\sin \alpha = 3 \cos \alpha$. Підставивши це співвідношення у даний вираз, маємо

$$\frac{4 \sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha + 4 \sin \alpha} = \frac{4 \cdot 3 \cos \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha + 4 \cdot 3 \cos \alpha} = \frac{11 \cancel{\cos \alpha}}{13 \cancel{\cos \alpha}} = \frac{11}{13}.$$

9

Спростіть вираз $\frac{a^2 - b^2}{a - b} - \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$.

- ☐ А $a + b$
- ☐ Б ab
- ☒ В $\frac{ab}{a + b}$
- ☐ Г $ab(a + b)$
- ☐ Д $\frac{ab}{a^2 - b^2}$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - b^2}{a - b} - \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} &= \frac{(\cancel{a-b})(a+b)}{\cancel{a-b}} - \frac{(\cancel{a-b})(a^2 + ab + b^2)}{(\cancel{a-b})(a+b)} = \\ &= a + b - \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} = \frac{(a+b)^2 - (a^2 + ab + b^2)}{a + b} = \\ &= \frac{\cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} - ab - \cancel{b^2}}{a + b} = \frac{ab}{a + b}. \end{aligned}$$

10

Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x = 2 \sin x$.

- ☐ А $(-1)^n \arcsin 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- ☒ Б $\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- ☐ В $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- ☐ Г $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- ☐ Д $\frac{3\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$\sin^2 x = 2 \sin x,$$

$$\sin^2 x - 2 \sin x = 0,$$

$$\sin x (\sin x - 2) = 0.$$

Звідси або $\sin x = 0$, або $\sin x = 2$. Останнє рівняння не має розв'язків, оскільки $|\sin x| \leq 1$. Розв'язком рівняння $\sin x = 0$ є $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

11

Укажіть область визначення функції $f(x) = \sqrt[6]{4 - x^2}$.

☒ А $[-2; +2]$

☐ Б $(-\infty; 4]$

☐ В $[-4; +\infty)$

☐ Г $[0; 2]$

☐ Д $[2; +\infty)$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Областю визначення функції $f(x)$ є розв'язок нерівності $4 - x^2 \geq 0$, $x^2 \leq 4$, $x \in \mathbb{Z}$.

12

Обчисліть $2 \log_2 4 - \log_2 8$.

☐ А -2

☐ Б -1

☒ В 1

☐ Г 2

☐ Д 7

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$2 \log_2 4 - \log_2 8 = 2 \log_2 2^2 - \log_2 2^3 = 4 \log_2 2 - 3 \log_2 2 = \log_2 2 = 1.$$

13

Укажіть, скільки п'ятицифрових чисел (без повторення цифр) можна скласти з цифр 1, 3, 5, 7, 9.

- ☐ А 90
- ☐ Б 100
- ☐ В 115
- ☒ Г 120
- ☐ Д 145

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Шукане значення — кількість перестановок з п'яти елементів $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

14

Розв'яжіть нерівність $\log_5 0,2 \cdot \log_5 x > 0$.

- ☐ А $(-\infty; 0)$
- ☒ Б $(0; 1)$
- ☐ В $(0; +\infty)$
- ☐ Г $(1; 5)$
- ☐ Д $(5; +\infty)$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$\log_5 0,2 \cdot \log_5 x > 0,$
 $\log_5 5^{-1} \cdot \log_5 x > 0,$
 $-\log_5 x > 0,$
 $\log_5 x < 0,$
звідки $0 < x < 1$.

15

Укажіть, скільки коренів має рівняння $x|x| - 5x = 0$.

- ☐ А чотири
- ☒ Б три
- ☐ В два
- ☐ Г один
- ☐ Д Інша відповідь

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Розглянемо два випадки.

I. При $x \geq 0$ $|x| = x$, рівняння матиме вигляд $x^2 - 5x = 0$, $x(x + 5) = 0$, звідки $x_1 = 0$, $x_2 = 5$;

II. При $x < 0$ $|x| = -x$, рівняння матиме вигляд $-x^2 - 5x = 0$, $x(x + 5) = 0$, звідки $x_1 = 0$ (сторонній корінь, оскільки $x < 0$), $x_2 = -5$.

Таким чином, рівняння $x|x| - 5x = 0$ має три корені.

16

Укажіть суму коренів рівняння $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+1} = 4^{1-2x}$.

- ☐ А -4
- ☐ Б -2
- ☐ В 2
- ☒ Г 4
- ☐ Д 5

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+1} = 4^{1-2x},$$

$$(2^{-1})^{x^2+1} = (2^2)^{1-2x},$$

$$2^{-x^2-1} = 2^{2-4x},$$

$$-x^2 - 1 = 2 - 4x,$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

За теоремою Вієта коренями цього рівняння є числа $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Їх сума дорівнює $1 + 3 = 4$.

Знайдіть область значень функції $y = 2^{-|x|}$.

17

- ☐ А $(-\infty; +\infty)$
- ☐ Б $(0; +\infty)$
- ☐ В $(0; 1)$
- ☐ Г $[1; +\infty)$
- ☒ Д $(0; +1]$

Ви відповіли правильно

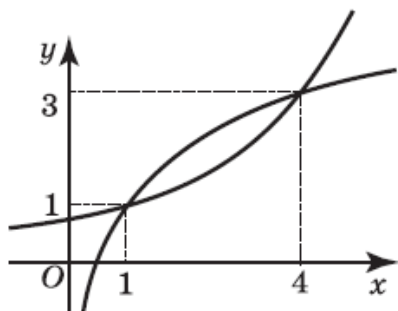
Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Очевидно, що задана функція парна, тому будемо розглядати її при $x \geq 0$. При вказаних значеннях x $y = 2^{-x} = (2^{-1})^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ — спадна функція. Отже, свого найбільшого значення вона набуває при $x = 0$ і воно дорівнює $2^0 = 1$. За властивістю показникової функції a^x ($0 < a < 1$) вона прямує до нуля при $x \rightarrow +\infty$. Отже, множиною значень функції $y = 2^{-|x|}$ є проміжок $(0; 1]$.

18

На рисунку зображено графіки функцій $f(x) = \log_2 x + 1$ і $g(x) = \frac{2^x + 5}{7}$. Укажіть, скільки цілих розв'язків має нерівність $g(x) \leq f(x)$.



- ☐ А безліч
- ☒ Б 4
- ☐ В 3
- ☐ Г 2
- ☐ Д 1

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

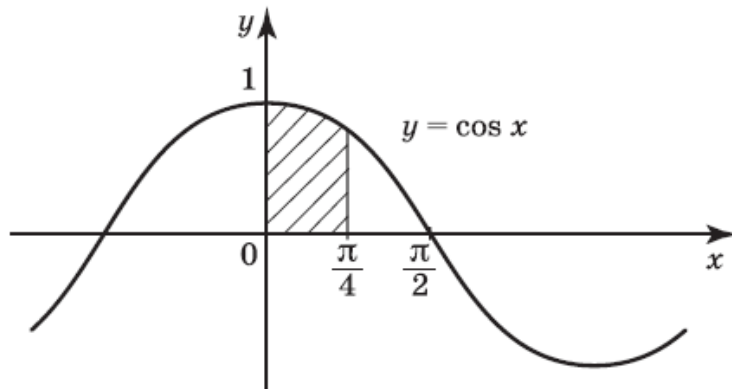
[Приховати пояснення](#)

Оскільки областю визначення функції $g(x)$ є вся числова пряма, зрозуміло, що її графік функції — крива, опукла вниз, тоді графік функції $f(x)$ — крива, опукла вгору. З рисунку бачимо, що розв'язком нерівності

$g(x) \leq f(x)$ є проміжок $[1; 4]$, який містить чотири цілих числа.

19

Обчисліть площу заштрихованої фігури, зображеної на рисунку.



- ☐ А $\frac{1}{4}$
- ☐ Б $\frac{1}{2}$
- ☐ В $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ☒ Г $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ☐ Д 1

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Шукана площа криволінійної трапеції $S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

20

Якщо $\frac{2}{a} = b - \frac{1}{c}$, то $a =$

☒ А $\frac{2c}{bc-1}$

☐ Б $\frac{bc-2}{c}$

☐ В $\frac{c}{bc+2}$

☐ Г $\frac{c}{1-bc}$

☐ Д $\frac{2b+c}{c}$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$\frac{2}{a} = b - \frac{1}{c} = \frac{bc-1}{c}, \text{ звідки } \frac{a}{2} = \frac{c}{bc-1}, \quad a = \frac{2c}{bc-1}.$$

21

Укажіть проміжки спадання функції $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2}$.

☐ А $(-1; -0,5]$

☐ Б $(-0,25; 0,25)$

☒ В $[-0,5; 0]$

☐ Г $[-0,75; -0,25]$

☐ Д $[0; +0,5]$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Знайдемо похідну заданої функції.

$$y' = \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} \right)' = \frac{2}{3} \cdot 3x^2 + \frac{2x}{2} = 2x^2 + x.$$

Розв'яжемо нерівність $y' < 0$.

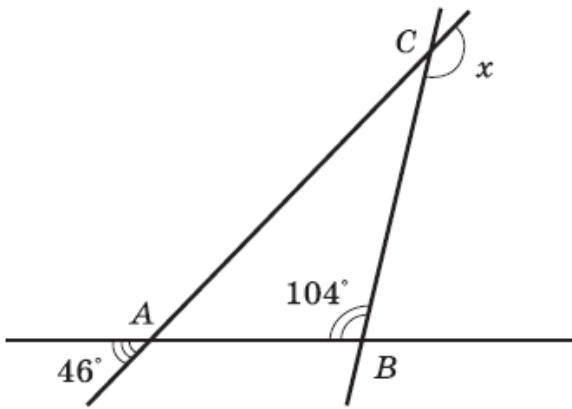
$$2x^2 + x < 0,$$

$$2x(x + 0,5) < 0,$$

$$x \in (-0,5; 0).$$

Оскільки функція y неперервна на кінцях проміжку спадання, приєднуємо ці точки до проміжку. Отже, дана функція спадає при $x \in [-0,5; 0]$.

Знайдіть градусну міру кута x , позначеного на рисунку.



- ☐ А 95°
- ☐ Б 120°
- ☐ В 140°
- ☒ Г 150°
- ☐ Д 160°

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Шуканий кут — зовнішній кут трикутника ABC при вершині C . За теоремою про зовнішній кут трикутника $x = \angle CAB + \angle CBA = 46^\circ + 104^\circ = 150^\circ$ (тут $\angle CAB$ дорівнює 46° як вертикальний).

У трикутнику ABC : $BC = 8$ см, $\angle BAC = 45^\circ$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо цього трикутника.

- ☒ А $8\sqrt{2}$ см
- ☐ Б 8 см
- ☐ В $8\sqrt{3}$ см
- ☐ Г 12 см
- ☐ Д 16 см

Ви відповіли правильно

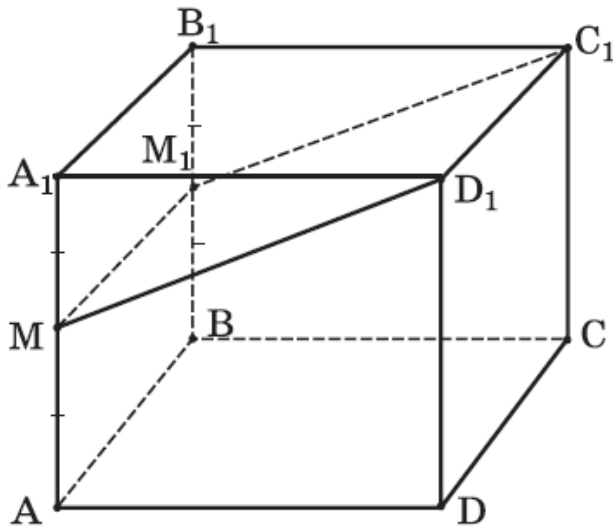
Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

За теоремою синусів $\frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2R$, звідки $\frac{8}{\sin 45^\circ} = 2R$,
 $R = \frac{4}{\sin 45^\circ} = 4 \div \frac{1}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ см.

24

В кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро якого дорівнює 10, через точку M ($M \in AA_1$ і $AM = MA_1$) та ребро $C_1 D_1$ проведено переріз. Знайти площу перерізу.



- ☐ А $25\sqrt{3}$
- ☐ Б 50
- ☒ В $50\sqrt{5}$
- ☐ Г 75
- ☐ Д 100

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Зрозуміло, що утворений переріз $MM_1 C_1 D_1$ — прямокутник. $MM_1 = C_1 D_1 = 10$. Другу його сторону знайдемо з прямокутного трикутника $MA_1 D_1$.

$$MD_1 = \sqrt{MA_1^2 + A_1 D_1^2} = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{25 + 100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$$

Таким чином, площа перерізу дорівнює $S = 10 \cdot 5\sqrt{5} = 50\sqrt{5}$.

25

Переріз циліндра, проведений паралельно його осі, знаходиться на відстані 2 см від неї і є квадратом. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює $8\sqrt{3}\pi$ см². Знайдіть площу перерізу (у см²).

- ☐ А $4\sqrt{3} \text{ см}^2$
☒ Б 8 см^2
☐ В $6\sqrt{2} \text{ см}^2$
☐ Г 16 см^2
☐ Д $8\sqrt{6} \text{ см}^2$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Нехай $ABCD$ — заданий переріз, $AB = BC = CD = AD$, $(ABCD) \parallel OO_1$, $OH \perp AB$, $OK = 2 \text{ см}$.

Нехай радіус основи циліндра дорівнює R , а висота циліндра — H . Тоді площа його бокової поверхні $S = 2\pi RH = 8\sqrt{3}\pi$, звідки $RH = 4\sqrt{3}$, $H = \frac{4\sqrt{3}}{R}$.

Розглянемо прямокутний трикутник AKO .

$AO = R$, $OK = 2$, $AK = \frac{AB}{2} = \frac{H}{2}$ (оскільки $AD = H = AB$). За теоремою Піфагора

$$R^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2 + 2^2,$$

$$R^2 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{2R}\right)^2 + 2^2,$$

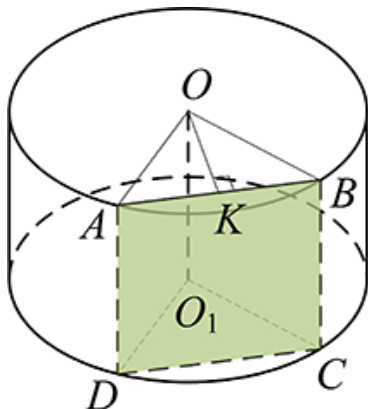
$$R^2 = \frac{12}{R^2} + 4,$$

$$R^4 - 4R^2 - 12 = 0.$$

Зробивши заміну $R^2 = t$, маємо квадратне рівняння $t^2 - 4t - 12 = 0$, коренями якого за теоремою Вієта є $t_1 = -2$ (сторонній корінь, оскільки $t \geq 0$) і $t_2 = 6$. Виконавши зворотну заміну, маємо $R^2 = 6$, $R = \sqrt{6} \text{ см}$. Тоді

$$H = \frac{4\sqrt{3}}{R} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ см}.$$

Таким чином, площа перерізу дорівнює $H^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8 \text{ см}^2$.



Обчисліть $2 \cos 160^\circ \cdot \cos 140^\circ \cdot \cos 100^\circ$.

Ви відповіли правильно: $-0,25$

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

$$\begin{aligned}
 2 \cos 160^\circ \cdot \cos 140^\circ \cdot \cos 100^\circ &= 2 \cos (180^\circ - 20^\circ) \cdot \cos (180^\circ - 40^\circ) \cdot \cos (90^\circ + 10^\circ) = \\
 &= -2 \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \sin 10^\circ = \frac{-2 \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \\
 &= -\frac{\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ} = -\frac{2 \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \sin 20^\circ}{2 \cos 10^\circ} = \\
 &= -\frac{\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ}{2 \cos 10^\circ} = -\frac{2 \sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ}{4 \cos 10^\circ} = -\frac{\sin 80^\circ}{4 \cos 10^\circ} = \\
 &= -\frac{\sin (90^\circ - 10^\circ)}{4 \cos 10^\circ} = -\frac{\cos 10^\circ}{4 \cos 10^\circ} = -\frac{1}{4} = -0,25.
 \end{aligned}$$

Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n) , в якій $b_2 + b_4 = 300$ і $b_1 + b_3 = 100$.

Ви відповіли правильно: 10

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

Якщо знаменник геометричної прогресії q , то $b_2 = b_1 q$, $b_3 = b_1 q^2$, $b_4 = b_1 q^3$, звідки маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} b_1 q + b_1 q^3 = 300, \\ b_1 + b_1 q^2 = 100, \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 q(1 + q^2) = 300, \\ b_1(1 + q^2) = 100. \end{cases}$$

Розділивши перше рівняння системи на друге, знайдемо $q = 3$. Тоді з другого рівняння системи

$$b_1(1 + 3^2) = 100, \text{ звідки } b_1 = \frac{100}{10} = 10.$$

Розв'яжіть рівняння $(x + 4)(x + 1) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6$

Ви відповіли правильно: -5

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

$$\begin{aligned}
 (x + 4)(x + 1) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} &= 6, \\
 x^2 + 5x + 4 - 6 &= 3\sqrt{x^2 + 5x + 2}, \\
 x^2 + 5x - 2 &= 3\sqrt{x^2 + 5x + 2}.
 \end{aligned}$$

Зробимо заміну $x^2 + 5x - 2 = t$, тоді $\sqrt{x^2 + 5x + 2} = \sqrt{t + 4}$:

$$t = 3\sqrt{t + 4},$$

$$\begin{cases} t^2 = 9(t + 4), \\ t + 4 \geq 0, \\ t \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 - 9t - 36 = 0, \\ t \geq 0. \end{cases}$$

Коренями рівняння $t^2 - 9t - 36 = 0$ за теоремою Вієта є числа $t_1 = 12$ і $t_2 = -3$, останнє не задовольняє нерівності $t \geq 0$. Виконавши зворотну заміну, маємо $x^2 + 5x - 2 = 12$, $x^2 + 5x - 14 = 0$, коренями якого за теоремою Вієта є числа $x_1 = 2$, $x_2 = -7$. Оскільки рівняння має два корені, у відповідь запишемо їх суму $2 + (-7) = -5$.

29

У трьох відрах налита вода. Якщо чверть води з першого відра перелити до другого, а потім чверть води з другого перелити у третє, то в кожному відрі буде по 9 л води. Скільки літрів води було спочатку у третьому відрі?

Ви відповіли правильно: 6

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

З першого відра відлили до другого чверть води, після чого у першому відрі стало 9 л, отже спочатку у першому відрі було $9 : \frac{3}{4} = 9 \cdot \frac{4}{3} = 12$ л води, а у друге відро відлили, відповідно, $12 - 9 = 3$ л.

Оскільки з другого відра відлили до третього чверть води, після чого у другому відрі стало 9 л, то після додавання води з першого відра у другому відрі було $9 : \frac{3}{4} = 9 \cdot \frac{4}{3} = 12$ л води, а у третє відро відлили, відповідно, $12 - 9 = 3$ л.

Оскільки після цього у третьому відрі стало 9 л, то спочатку у третьому відрі було $9 - 3 = 6$ л.

30

В ящику 4 білих, 5 червоних і декілька синіх кульок. Знайдіть загальну кількість кульок в ящику, якщо ймовірність витягти навмання синю кульку дорівнює $\frac{1}{4}$.

Ви відповіли правильно: 12

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

Нехай кількість синіх кульок в ящику дорівнює x . Оскільки ймовірність витягти з ящика синю кульку дорівнює відношенню кількості синіх кульок до загальної їх кількості у ящику, то $\frac{x}{4 + 5 + x} = \frac{1}{4}$, звідки $4x = 9 + x$, $3x = 9$, $x = 3$.

Отже, загальна кількість кульок в ящику дорівнює $4 + 5 + 3 = 12$.

Укажіть всі значення параметра a , при яких система рівнянь

$$\begin{cases} ax + 4y = 6 + a, \\ 2x + (2 + a)y = 8 \end{cases}$$

має безліч розв'язків.

Якщо таке значення одне, то запишіть його у відповідь.

Якщо таких значень кілька, то у відповідь запишіть їх суму.

Ви відповіли правильно: 2

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

Виразимо з першого рівняння системи y : $4y = 6 + a - ax$, $y = \frac{6 + a - ax}{4}$ і підставимо це значення у друге рівняння системи.

$$2x + (2 + a) \cdot \frac{6 + a - ax}{4} = 8,$$

$$8x + (2 + a) \cdot (6 + a - ax) = 32,$$

$$8x + (2 + a)(6 + a) - a(2 + a)x = 32,$$

$$(8 - a(2 + a))x = 32 - (2 + a)(6 + a).$$

Це рівняння має безліч розв'язків, коли

$$\begin{cases} 8 - a(2 + a) = 0, \\ 32 - (2 + a)(6 + a) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 8 - 2a - a^2 = 0, \\ 32 - 12 - 8a - a^2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + 2a - 8 = 0, \\ a^2 + 8a - 20 = 0. \end{cases}$$

За теоремою Вієта коренями першого рівняння є числа 2 і -4 , а другого — числа 2 і -10 . Отже, розв'язком системи є значення $a = 2$.

Паралелограм $ABCD$ побудовано на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах. Відомо, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$. Знайдіть величину кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (у градусах).

Ви відповіли правильно: 60

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виходять з однієї вершини. Тоді за правилом паралелограма додавання векторів їх сума $\vec{a} + \vec{b}$ направлена по діагоналі паралелограма, що виходить зі спільної для векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вершини.

Отже, маємо довжини двох суміжних сторін паралелограма і однієї з його діагоналей. Діагональ розбиває паралелограм на два рівних трикутники зі сторонами 3, 5 і 7. Знайдемо площу кожного з них за формулою Герона.

$$p = \frac{3 + 5 + 7}{2} = \frac{15}{2},$$

$$S = \sqrt{\frac{15}{2} \cdot \left(\frac{15}{2} - 3\right) \cdot \left(\frac{15}{2} - 5\right) \cdot \left(\frac{15}{2} - 7\right)} = \sqrt{\frac{15}{9} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3^3 \cdot 5^2}{2^4}} =$$

$$= \frac{15}{4}\sqrt{3}.$$

Тоді площа паралелограма дорівнює $2S = 2 \cdot \frac{15}{4}\sqrt{3} = \frac{15}{2}\sqrt{3}$. З іншого боку, площа паралелограма дорівнює добутку довжин двох суміжних сторін на синус кута між ними, тобто $3 \cdot 5 \cdot \sin \gamma = 15 \sin \gamma$.

Таким чином, $15 \sin \gamma = \frac{15}{2}\sqrt{3}$, звідки $\sin \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\gamma = 60^\circ$.

33

Металева куля радіуса $R = \sqrt[3]{16}$ перелита на конус, висота якого 8. Знайдіть відношення площі бічної поверхні конуса до площі його основи.

Ви відповіли правильно: 3

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

Об'єм кулі дорівнює $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (\sqrt[3]{16})^3 = \frac{64}{3}\pi$.

Якщо радіус основи конуса дорівнює r , то його об'єм $\frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 8 = \frac{64}{3}\pi$, звідки $r^2 = 8$, $r = 2\sqrt{2}$.

Тоді апофема конуса дорівнює $l = \sqrt{r^2 + H^2} = \sqrt{8 + 64} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

Площа бічної поверхні конуса $S_1 = \pi r l = \pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 24\pi$, площа основи конуса $S_2 = \pi r^2 = 8\pi$.

Шукане відношення $\frac{S_1}{S_2} = \frac{24\pi}{8\pi} = 3$.

34

У правильній трикутній піраміді $SABC$ через її висоту SO і бічне ребро SB проведено площину. Площа утвореного перерізу в 4 рази менша від площі повної поверхні піраміди. Знайдіть двогранный кут φ при основі піраміди. У відповідь запишіть значення $0,7 \cos \varphi$.

Ви відповіли правильно: 0,1

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

Нехай сторона основи піраміди дорівнює a , висота піраміди $SO = h$. Тоді $BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ як висота у правильному трикутнику зі стороною a . Точка O є центром правильного трикутника ABC , отже,

$$OH = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

З прямокутного трикутника SHO

$$SH = \sqrt{OH^2 + SO^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2 + h^2} = \frac{\sqrt{a^2 + 12h^2}}{2\sqrt{3}},$$
 таким чином, площа бічної

поверхні піраміди дорівнює $3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{a^2 + 12h^2}}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3(a^2 + 12h^2)}}{4}$.

Враховуючи, що площа основи дорівнює $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а площа перерізу

$$S_{SHB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot h = \frac{ah\sqrt{3}}{4}, \text{ з умови маємо співвідношення}$$

$$4 \cdot \frac{ah\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3(a^2 + 12h^2)}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

$$4h = \sqrt{a^2 + 12h^2} + a,$$

$$4h - a = \sqrt{a^2 + 12h^2},$$

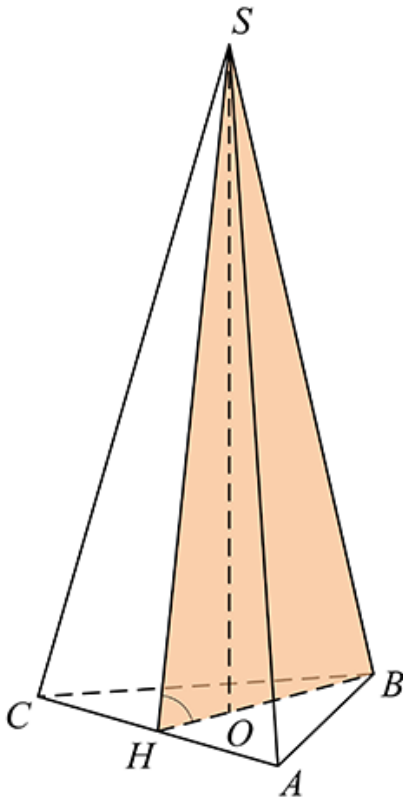
$$(4h - a)^2 = \left(\sqrt{a^2 + 12h^2}\right)^2,$$

$$16h^2 - 8ah + a^2 = a^2 + 12h^2,$$

$$4h^2 = 8ah, \text{ звідки } h = 2a.$$

Шуканий двогранний кут при основі піраміди — $\angle SHO = \varphi$. З прямокутного трикутника SHO

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{OH}{SH} = \frac{a}{2\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{a^2 + 12h^2}}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 12h^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 12 \cdot (2a)^2}} = \\ &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + 48a^2}} = \frac{a}{\sqrt{49a^2}} = \frac{a}{7a} = \frac{1}{7}. \text{ У відповідь записуємо значення } 0,7 \cos \varphi = \frac{0,7}{7} = 0,1. \end{aligned}$$



Побудуйте графік функції $y = \frac{x^3 - x^2}{2|x - 1|}$. Користуючись побудованим графіком функції, знайдіть усі значення a , при яких рівняння $\frac{x^3 - x^2}{2|x - 1|} = a$ має два корені. У відповідь запишіть кількість цілих

знайдених значень a .

Ви відповіли правильно: 0

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

При $x > 1$ $|x - 1| = x - 1$, тому

$$y = \frac{x^2 \cancel{(x-1)}}{2 \cancel{(x-1)}} = \frac{x^2}{2};$$

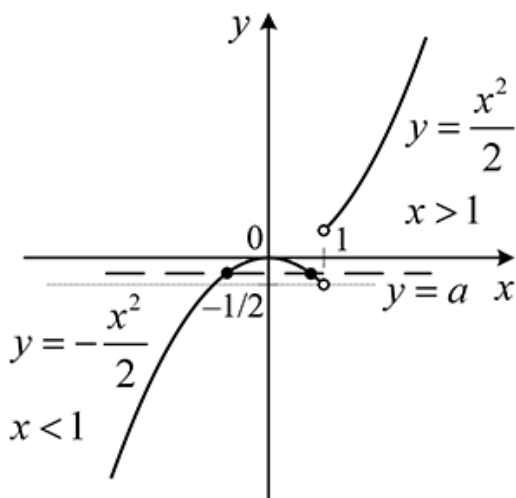
при $x < 1$ $|x - 1| = -(x - 1)$, тому

$$y = \frac{x^2 \cancel{(x-1)}}{-2 \cancel{(x-1)}} = -\frac{x^2}{2}.$$

Зобразимо кожен з графіків при вказаних значеннях x — отримаємо графік функції Рівняння

$\frac{x^3 - x^2}{2|x - 1|} = a$ матиме два корені тоді, коли побудований графік і пряма вигляду $y = a$ матимуть дві

точки перетину: при $a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. У цей проміжок не входить жодне ціле значення, тому у відповідь запишемо число 0.



36

Розв'яжіть рівняння $\sin 2x - a\sqrt{\sin x}\sqrt{\cos x} + 2a - 8 = 0$. У відповідь запишіть найбільше ціле додатне значення a , при якому рівняння має розв'язок.

Ви відповіли правильно: 5

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

Зауважимо, що $\sin x \geq 0$ і $\cos x \geq 0$, $\sqrt{\sin x}\sqrt{\cos x} = \sqrt{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sin 2x}$. Зробимо заміну $\sqrt{\sin 2x} = t$ ($0 \leq t \leq 1$): $t^2 - \frac{a}{\sqrt{2}}t + 2a - 8 = 0$. Дискримінант отриманого квадратного тричлена

$$D = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 - 4(2a - 8) = \frac{a^2}{2} - 8a + 32 = \frac{a^2 - 16a + 64}{2} = \frac{(a - 8)^2}{2}.$$

Отже, його корені

$$t = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}} \pm \frac{a - 8}{\sqrt{2}}}{2};$$

$$t_1 = \frac{a - 4}{\sqrt{2}};$$

$$t_2 = 2\sqrt{2}.$$

Оскільки $0 \leq t \leq 1$, то корінь t_2 — сторонній. $0 \leq t_1 \leq 1$ при $0 \leq \frac{a - 4}{\sqrt{2}} \leq 1$,

$$0 \leq a - 4 \leq \sqrt{2}, \quad 4 \leq a \leq 4 + \sqrt{2}.$$

При вказаних значеннях a , виконавши зворотну заміну, отримуємо

$$\sqrt{\sin 2x} = \frac{a - 4}{\sqrt{2}},$$

$$\sin 2x = \frac{(a - 4)^2}{2},$$

$$2x = (-1)^k \arcsin \frac{(a - 4)^2}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin \frac{(a - 4)^2}{2} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким чином, при $a < 4$ та $a > 4 + \sqrt{2}$ рівняння розв'язку не має.

$$\text{При } 4 \leq a \leq 4 + \sqrt{2} \quad x = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin \frac{(a - 4)^2}{2} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки $4 + \sqrt{2} \approx 5,41$, у відповідь запишемо число 5.