

Тест ЗНО з математики.

Результат

100% 😊

Тестовий бал ?

47 із 47

Рейтинговий бал ?

200.0

Витрачено часу: 4 хвилини

[Ще раз](#) [Інший варіант](#) [Статистика](#)

Поділитися...

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35	36						

1

Знайдіть натуральне одноцифрове число **N**, якщо відомо, що сума $510 + N$ ділиться на 9 без остачі.

- ☐ **А** 1
- ☒ **Б** 3
- ☐ **В** 5
- ☐ **Г** 6
- ☐ **Д** 9

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

За ознакою подільності на 9 число ділиться на 9, коли сума його цифр ділиться на 9. Сума перших двох цифр числа $510 + N$ дорівнює $5 + 1 = 6$, отже для того, аби це число ділилося на 9, третя цифра має дорівнювати 3.

2

Визначте кількість усіх дробів зі знаменником 28, які більші за $\frac{4}{7}$, але менші від $\frac{3}{4}$.

- ☐ А шість
- ☒ Б чотири
- ☐ В три
- ☐ Г два
- ☐ Д один

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$\frac{4}{7} = \frac{16}{28}, \quad \frac{3}{4} = \frac{21}{28}.$$

Між цими двома дробами лежать $\frac{17}{28}$, $\frac{18}{28}$, $\frac{19}{28}$ і $\frac{20}{28}$ — усього чотири дробу.

3

Під час закладання нового парку 25 % його площі відвели під посадку кленів, 50 % площі, що залишилася, — під посадку дубів, а решту площі — під газони. Вкажіть, на якій із діаграм правильно показано розподіл посадок.

 — Дуби  — Газони  — Клену

А



Б



В



Г



Д



Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

З умови випливає, що під посадку дубів і під газони відвели однакову площу, а саме

половину від залишку після посадки кленів $\left(\frac{75}{2}\%\right)$. Отже правильна діаграма —

В.

4

Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2 + 64}{x - 5} > 0$.

- ☐ А $(-\infty; 5) \cup (8; +\infty)$
- ☐ Б $(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$
- ☐ В $(5; 8)$
- ☒ Г $(5; +\infty)$
- ☐ Д $(-\infty; 5)$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Оскільки $x^2 + 64 > 0$, задана нерівність рівносильна нерівності $x - 5 > 0$, тобто $x > 5$.

5

Якщо $F = \frac{GMm}{R^2}$ і $R > 0$, $R =$

- ☐ А $\sqrt{FGMm}$
- ☐ Б $\sqrt{\frac{Mm}{GF}}$
- ☐ В $\sqrt{\frac{GF}{Mm}}$
- ☐ Г $\sqrt{\frac{F}{GMm}}$
- ☒ Д $\sqrt{\frac{GMm}{F}}$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$R^2 = \frac{GMm}{F}, \text{ отже, враховуючи, що } R > 0, R = \sqrt{\frac{GMm}{F}}.$$

6

В уривку із художнього твору 47 слів мають різну кількість букв. Укажіть моду (мода — це те значення випадкової величини, яке зустрічається найчастіше) цього розподілу за допомогою зображеного на рисунку полігона частот.



- ☐ А 2
- ☐ Б 4
- ☒ В 5
- ☐ Г 8
- ☐ Д 10

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Найчастіше в уривку зустрічаються 5-буквені слова (10 разів), отже мода даного розподілу — число 5.

7

Укажіть правильну нерівність, якщо $a = 5\sqrt{2}$, $b = 7$, $c = \sqrt{51}$.

☒ А $b < a < c$

☐ Б $a < b < c$

☐ В $c < a < b$

☐ Г $a < c < b$

☐ Д $b < c < a$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Оскільки усі наведені числа одного знака, порівняємо їх квадрати.

$$a^2 = (5\sqrt{2})^2 = 50,$$

$$b^2 = 7^2 = 49,$$

$$c^2 = (\sqrt{51})^2 = 51.$$

Оскільки $b^2 < a^2 < c^2$, то і $b < a < c$.

8

Обчисліть $\cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12}$.

☐ А 1

☒ Б $\frac{\sqrt{3}}{2}$

☐ В $\frac{1}{2}$

☐ Г $\frac{\sqrt{2}}{2}$

☐ Д Інша відповідь

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$\cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12} = \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) \underbrace{\left(\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} \right)}_1 =$$

$$= \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

9

Укажіть найменший додатний період функції $y = 2\operatorname{ctg}(3x)$.

- ☐ А 2π
- ☐ Б π
- ☒ В $\frac{\pi}{3}$
- ☐ Г $\frac{2\pi}{3}$
- ☐ Д $\frac{\pi}{2}$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

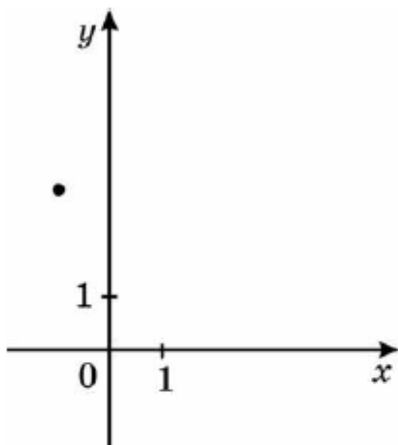
[Приховати пояснення](#)

Періодом функції $y = \operatorname{ctg} x$ є число π . Оскільки аргумент заданої функції множиться на 3, то найменшим додатним періодом функції $y = 2\operatorname{ctg} 3x$ буде $\frac{\pi}{3}$.

$$2\operatorname{ctg} 3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\operatorname{ctg}(3x + \pi) = 2\operatorname{ctg} 3x.$$

10

На рисунку зображено точку, через яку проходить графік функції $y = f(x)$. Укажіть функцію $f(x)$.



- ☐ А $f(x) = -x$
- ☐ Б $f(x) = \sqrt{x}$
- ☐ В $f(x) = \log_2 x$
- ☐ Г $f(x) = x^3$
- ☒ Д $f(x) = 3^{-x}$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Графік функції $f(x) = -x$. — бісектриса II і IV квадрантів. Функції $f(x) = \sqrt{x}$ і $f(x) = \log_2 x$ визначені при $x \in [0; +\infty)$ і $x \in (0; +\infty)$ відповідно. Значення функції $f(x) = x^3$ при $x < 0$ від'ємне. Єдиним можливим варіантом є $f(x) = 3^{-x}$.

11

Розв'яжіть рівняння $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$.

- ☐ А $-\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- ☐ Б $-\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- ☐ В $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- ☒ Г $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- ☐ Д $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Розділимо обидві частини рівняння на 2.

$$\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 0,$$

$$\cos \frac{\pi}{3} \sin x - \sin \frac{\pi}{3} \cos x = 0,$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0, \quad x - \frac{\pi}{3} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{звідки } x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

12

Обчисліть $\log_a \sqrt{ab}$, якщо $\log_a b = 7$.

- ☐ А $\frac{2}{3}$
- ☐ Б 2
- ☐ В 3
- ☐ Г $\frac{7}{2}$
- ☒ Д 4

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Очевидно, що $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, тому

$$\log_a \sqrt{ab} = \frac{1}{2} \log_a (ab) = \frac{1}{2} (\log_a a + \log_a b) = \frac{1}{2} (1 + \log_a b) = \frac{1}{2} (1 + 7) = 4.$$

13

Укажіть, скільки можна скласти різних правильних дробів, чисельниками і знаменниками яких є числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

- ☒ А 28
- ☐ Б 56
- ☐ В 70
- ☐ Г 112
- ☐ Д інша відповідь

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Число 2 не може бути знаменником дробів, що задовольняють умові. Якщо знаменник дорівнює 3, то існує тільки один правильний дріб — $\frac{2}{3}$. Якщо знаменник дорівнює 4,

то шуканих дробів два — $\frac{2}{5}$ і $\frac{3}{4}$. Якщо знаменник дорівнює 5, то шуканих дробів три — $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ і $\frac{4}{5}$. Міркуючи аналогічно, отримуємо чотири дробу зі знаменником 6, п'ять дробів зі знаменником 7, шість дробів зі знаменником 8 і сім дробів зі знаменником 9 — загалом $1 + 2 + 3 + \dots + 7 = \frac{1+7}{2} \cdot 7 = 4 \cdot 7 = 28$.

14

Розв'яжіть нерівність $\log_{0,5} 5 < \log_{0,5} x$.

- ☐ А $(-5; 0)$
- ☒ Б $(0; 5)$
- ☐ В $(5; +\infty)$
- ☐ Г $(0,5; 5)$
- ☐ Д $(-\infty; 5)$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Оскільки $0 < 0,5 < 1$, то $5 > x$. Враховуючи область визначення ($x > 0$), отримуємо відповідь $x \in (0; 5)$.

15

Укажіть корінь рівняння $|x^2 - 6x| = 9$, який належить проміжку $(2; 1]$.

- ☒ А $3 - 3\sqrt{2}$
- ☐ Б $3 - \sqrt{2}$
- ☐ В 1
- ☐ Г 2
- ☐ Д $4 - 2\sqrt{2}$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Числа $3 - \sqrt{2}$, 2 та $4 - 2\sqrt{2}$ більші за 1 ($3 - \sqrt{2} > 1$, оскільки

$2 > \sqrt{2}$; $4 - 2\sqrt{2} > 1$, $3 > 2\sqrt{2}$, оскільки $3^2 = 9 > 8 = (2\sqrt{2})^2$; нерівність $2 > 1$ очевидна). Число 1, очевидно, не є розв'язком даного рівняння.

Переконаємось, що число $3 - 3\sqrt{2}$ дійсно є розв'язком даного рівняння.

$$|(3 - 3\sqrt{2})^2 - 6(3 - 3\sqrt{2})| = |9 - 2 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{2} + 18 - 18 + 18\sqrt{2}| = 9.$$

16

Розв'яжіть рівняння: $3^x = \frac{2\sqrt{3}}{6}$.

- ☐ А рівняння не має коренів
- ☐ Б $x = -1$
- ☒ В $x = -0,5$
- ☐ Г $x = 0,5$
- ☐ Д $x = 1$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$\frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 3^{-\frac{1}{2}}, \text{ отже, } 3^x = 3^{-\frac{1}{2}}, x = \frac{1}{2} = -0,5.$$

17

Укажіть область значень функції $y = \sqrt{x^2 + 9} - 6$.

- ☐ А $[9; +\infty)$
- ☐ Б $[0; +\infty)$
- ☐ В $[3; +\infty)$
- ☒ Г $[-3; +\infty)$
- ☐ Д $(-\infty; +\infty)$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$x^2 + 9 \geq 9,$$

$$\sqrt{x^2 + 9} \geq 3,$$

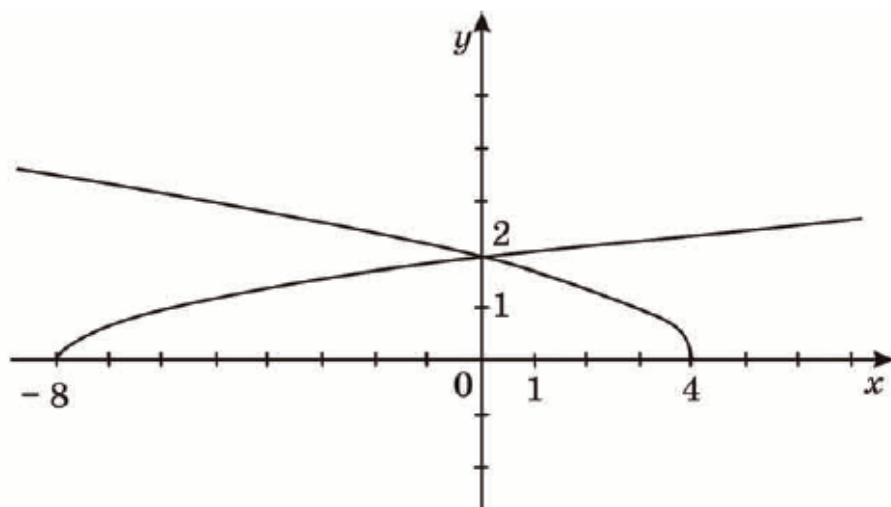
$$\sqrt{x^2 + 9} - 6 \geq -3.$$

Отже, областю значень функції y є проміжок $[-3; +\infty)$.

18

На рисунку зображено графіки функцій $g(x) = \sqrt{4-x}$ і $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x+8}$.

Укажіть проміжок, на якому виконується нерівність $f(x) \leq g(x)$.



- ☐ А $(-\infty; 0]$
- ☐ Б $[-8; +\infty)$
- ☐ В $[0; +\infty)$
- ☐ Г $[0; 4]$
- ☒ Д $[-8; 0]$

Ви відповіли правильно

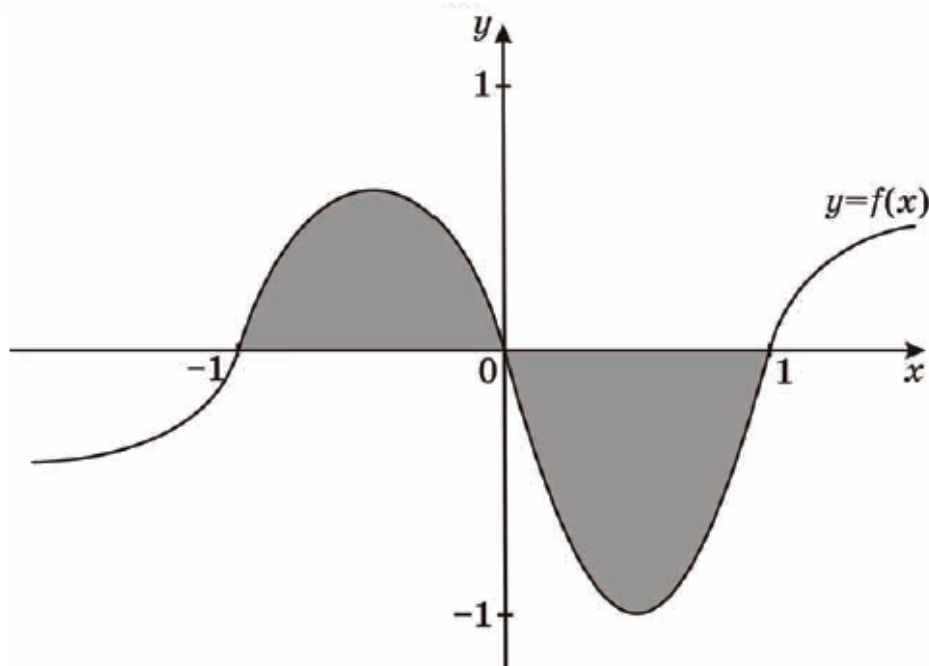
Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Очевидно, що графіком функції $g(x)$ є крива, що починається у точці $x = 4$, а графіком функції $f(x)$ є крива, що починається у точці $x = -8$. Отже, $f(x) \leq g(x)$ виконується при $x \in [-8; 0]$.

19

На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$. Укажіть формулу для обчислення площі зафарбованої фігури.



- ☐ А $\int_{-1}^1 f(x) dx$
- ☒ Б $\int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx$
- ☐ В $\int_0^1 f(x) dx - \int_{-1}^0 f(x) dx$
- ☐ Г $2 \int_{-1}^0 f(x) dx$
- ☐ Д $2 \int_0^1 f(x) dx$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Очевидно, що функція не є непарною, отже шукана площа

$$S = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 (-f(x)) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx.$$

Знайдіть значення виразу $\frac{\sqrt{9 + a^2 - 6a}}{a - 3}$, якщо $a = 2,5$.

- ☒ А -1
- ☐ Б $-0,5$
- ☐ В 0
- ☐ Г $0,5$
- ☐ Д 1

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Спростимо вираз.

$$\frac{\sqrt{9 + a^2 - 6a}}{a - 3} = \frac{\sqrt{(a - 3)^2}}{a - 3} = \frac{|a - 3|}{a - 3}.$$

Його значення дорівнює 1, якщо $a > 3$ і -1 , якщо $a < 3$. Отже, при $a = 2,5$ значення виразу дорівнює -1 .

21

Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$ (час t вимірюється у секундах, шлях s — у метрах). Визначте прискорення його руху у момент $t = 10$ с.

- ☐ А 164 м/с^2
- ☐ Б 60 м/с^2
- ☒ В 36 м/с^2
- ☐ Г 20 м/с^2
- ☐ Д 10 м/с^2

Ви відповіли правильно

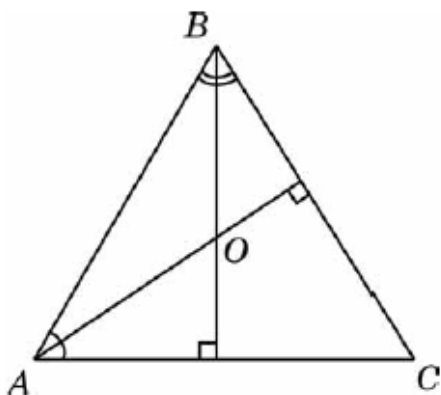
Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Швидкість тіла $s'(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t\right)' = 2t^2 - 4t + 4$, отже, прискорення тіла $s''(t) = (2t^2 - 4t + 4)' = 4t - 4$. У момент часу $t = 10$ с прискорення дорівнює $s''(10) = 4 \cdot 10 - 4 = 36 \text{ м/с}^2$.

22

У трикутнику ABC $\angle A = 59^\circ$, $\angle B = 62^\circ$. Із вершин цих кутів проведено висоти, що перетинаються в точці O . Визначте величину кута AOB .



- ☐ А 98°
- ☒ Б 121°
- ☐ В 144°
- ☐ Г 149°
- ☐ Д 154°

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Нехай H_B — основа висоти, проведеної з вершини B , H_A — основа висоти, проведеної з вершини A . З чотирикутника OH_ACH_B :

$$\begin{aligned}\angle H_AOH_B = \angle AOB &= 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - \angle C = 180^\circ - (180^\circ - \angle A - \angle B) = \\ &= \angle A + \angle B = 59^\circ + 62^\circ = 121^\circ.\end{aligned}$$

23

Сторони трикутника, одна з яких на 8 см більша за другу, утворюють кут 120° , а довжина третьої сторони дорівнює 28 см. Знайдіть периметр трикутника.

- ☐ А 84 см
- ☐ Б 72 см
- ☐ В 64 см
- ☒ Г 60 см
- ☐ Д 56 см

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

Нехай сторони кута дорівнюють x см і $x + 8$ см. Застосуємо до нього теорему косинусів.

$$28^2 = x^2 + (x + 8)^2 - 2x(x + 8) \cos 120^\circ,$$

$$784 = x^2 + x^2 + 16x + 64 + 2 \cdot \frac{1}{2} (x^2 + 8x),$$

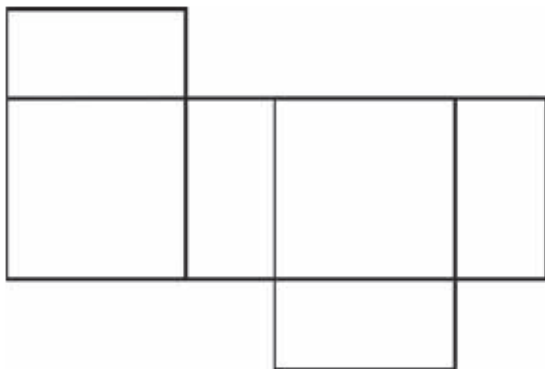
$$3x^2 + 24x - 720 = 0,$$

$$x^2 + 8x - 240 = 0.$$

За теоремою Вієта корені цього квадратного рівняння $x_1 = 12$ і $x_2 = -20$ (сторонній). Отже сторони кута дорівнюють 12 см і $12 + 8 = 20$ см. Таким чином, периметр трикутника $P = 12 + 20 + 28 = 60$ см.

24

На рисунку зображено розгортку поверхні тіла, складеного з двох квадратів і чотирьох однакових прямокутників, довжина сторін яких — 3 см і 6 см. Визначте об'єм цього тіла.



- ☒ А 108 см^3
- ☐ Б 54 см^3
- ☐ В 144 см^3
- ☐ Г 36 см^3
- ☐ Д інша відповідь

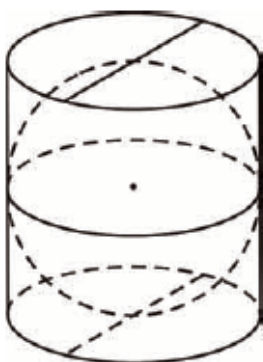
Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

Приховати пояснення

На рисунку зображена розгортка прямокутного паралелепіпеда з розмірами 3 см, 6 см і 6 см. Отже, його об'єм дорівнює $V = 3 \cdot 6 \cdot 6 = 108 \text{ см}^3$.

У склянку циліндричної форми, наповнену водою по самі вінця, поклали металеву кульку, що дотикається до дна склянки та стінок (див. рисунок). Визначте відношення об'єму води, яка залишилась у склянці, до об'єму води, яка вилілася зі склянки.



- ☐ А 1 : π
- ☐ Б 2 : π
- ☒ В 1 : 2
- ☐ Г 2 : 3
- ☐ Д 1 : 3

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Нехай довжина радіуса основи циліндричної склянки дорівнює R . Тоді висота склянки дорівнює $2R$ і його об'єм $V = (\pi R)^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$. Об'єм води, що вилілась зі склянки, дорівнює об'єму кульки $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3$. Об'єм води, що залишилась, дорівнює різниці об'ємів склянки і кульки, тобто

$$V_1 = V - V_2 = 2\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Отже, шукане відношення дорівнює $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 1:2$.

Обчисліть $2\sqrt{13} \cos\left(\arctg \frac{2}{3}\right)$.

Ви відповіли правильно: 6

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

Нехай $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} = \alpha$. За означенням арктангенса $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ отже, } \cos^2 \alpha = \frac{9}{13}.$$

Враховуючи, що $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos \alpha = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$. Таким чином,

$$2\sqrt{13} \cos\left(\operatorname{arctg} \frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 6.$$

Обчисліть суму членів нескінченно спадної геометричної прогресії, у якій $b_n = 5 \cdot 3^{-n}$.

Ви відповіли правильно: 2,5

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

$b_1 = 5 \cdot 3^{-1} = \frac{5}{3}$, $b_2 = 5 \cdot 3^{-2} = \frac{5}{9}$, $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{3}$. Таким чином, сума цієї прогресії

$$S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{\frac{5}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Розв'яжіть рівняння $x - 5 + \sqrt{2x^2 - 14x + 13} = 0$. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть їх добуток.

Ви відповіли правильно: -2

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 - 14x + 13} = 5 - x, \\ 2x^2 - 14x + 13 = (5 - x)^2, \\ 5 - x \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 14x + 13 = 25 - 10x + x^2, \\ x \leq 5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 12 = 0, \\ x \leq 5. \end{cases}$$

За теоремою Вієта коренями рівняння $x^2 - 4x - 12 = 0$ є числа $x_1 = -2$ та $x_2 = 6$. Останнє не задовольняє умові нерівності $x \leq 5$.

29

Маємо два водно-сольових розчини. Концентрація солі у першому розчині становить 0,25, а у другому — 0,4. На скільки більше треба взяти кілограмів одного розчину, ніж другого, щоб отримати розчин масою 50 кілограмів, концентрація солі в якому — 0,34.

Ви відповіли правильно: 10

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

Змішаємо x кг першого розчину з y кг другого розчину. Кількість солі в першому розчині складе 0,25 кг, у другому — 0,4 кг, у отриманому — $0,34 \cdot 50 = 17$ кг. Одержали систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 50, \\ 0,25x + 0,4y = 17, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 50 - x, \\ 0,25x + 0,4(50 - x) = 17, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 50 - x, \\ 0,25x + 20 - 0,4x = 17, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 50 - x, \\ 0,15x = 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 50 - x, \\ x = 20, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 20, \\ y = 30, \end{cases}$$

Таким чином, треба взяти на $30 - 20 = 10$ кг більше одного розчину, ніж другого для виконання умови задачі.

30

У коробці є 80 цукерок, з яких 44 — з чорного шоколаду, а решта — з білого. Визначте ймовірність того, що навмання взята цукерка з коробки буде з білого шоколаду.

Ви відповіли правильно: 0,45

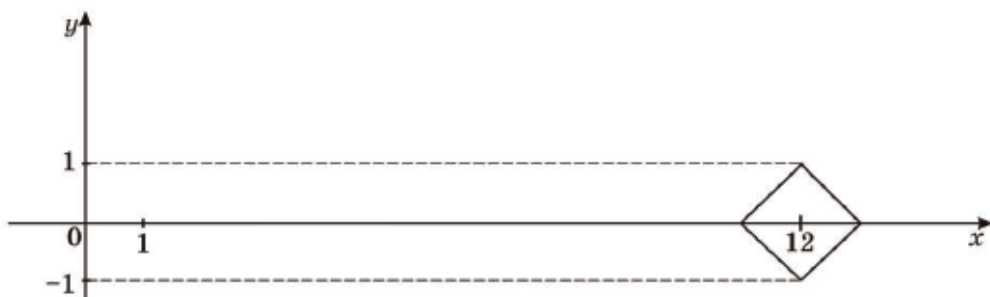
Бали: 2 із 2

Кількість цукерок з білого шоколаду складає $80 - 44 = 36$ шт. , отже ймовірність того, що намання взята з коробки цукерка виявиться з білого шоколаду, складає $\frac{36}{80} = \frac{9}{20} = 0,45$.

31

Використовуючи графік рівняння $|y| = 1 - |x - 12|$. (див. рисунок), знайдіть усі значення параметра a , при яких система $\begin{cases} |x - 12 + 4y| + |y| = 1, \\ x - a^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

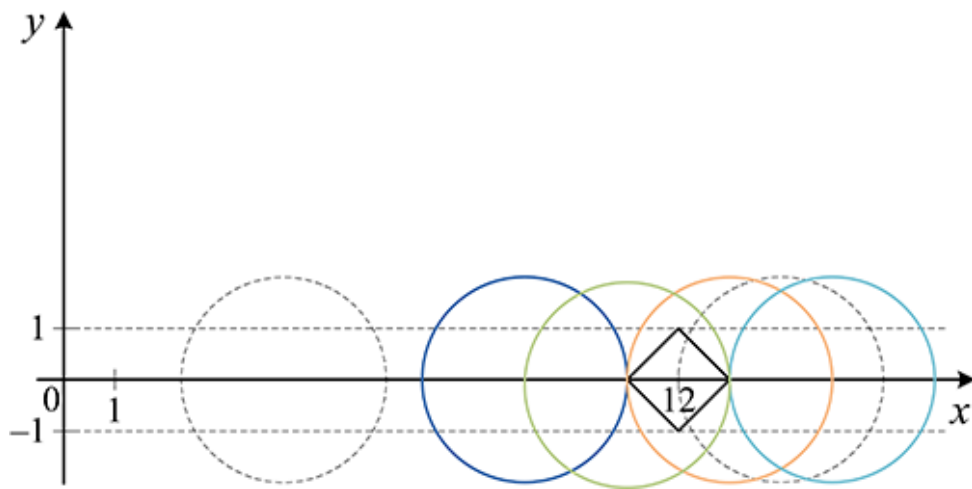
У відповідь запишіть їх суму.



Ви відповіли правильно: 48

Бали: 2 із 2

Графіком другого рівняння системи буде коло з центром у точці $(\alpha; 0)$, тобто, розташоване на осі x , і радіусом 2. Для того, щоб система мала єдиний розв'язок, коло має дотикатися до зображеного квадрата зліва або справа. Оскільки радіус кола більший за сторону квадрата, то таких варіантів дотику буде чотири. Вершини квадрата, що лежать на осі x , мають координати $(11; 0)$ та $(13; 0)$. Якщо коло торкається вершини $(11; 0)$, то його центр знаходиться або у точці $(9; 0)$, або у точці $(13; 0)$. Якщо ж коло торкається вершини $(13; 0)$, то його центр знаходиться або у точці $(11; 0)$, або у точці $(15; 0)$. Таким чином, задана система рівнянь має єдиний розв'язок при $\alpha = 9, 11, 13$ або 15 . Сума цих значень дорівнює $9 + 11 + 13 + 15 = 48$.



32

Визначте кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b} + \vec{c}$ у градусах, якщо відомо, що $\vec{a}(2; 2)$, $\vec{b}(2; 4)$ і $\vec{c}(-2; -6)$.

Ви відповіли правильно: 135

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

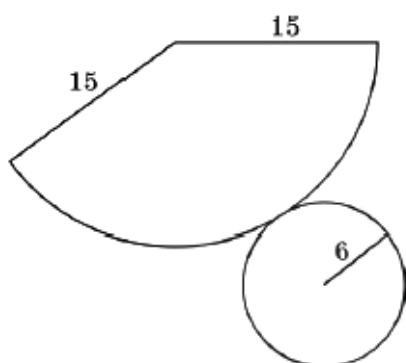
Знайдемо координати вектора $\vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$ як суму відповідних координат векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$: $\vec{d}(0; -2)$. З одного боку, скалярний добуток векторів $\vec{a} \cdot \vec{d} = 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) = -4$, з іншого він дорівнює $\vec{a} \cdot \vec{d} = |\vec{a}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \gamma$, де γ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{d}$. Оскільки $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $|\vec{d}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$, то $-4 = 2\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos \gamma$, звідки $\cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Отже, кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{d}$

$$\gamma = \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ.$$

33

На рисунку зображено розгортку конуса. Визначте відношення площі повної поверхні цього конуса до площі його бічної поверхні.



Ви відповіли правильно: 1,4

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

З розгортки видно, що радіус основи конуса $R = 6$, а твірна конуса $l = 15$. Таким чином, площа бічної поверхні конуса $S_1 = \pi Rl = \pi \cdot 6 \cdot 15 = 90\pi$; площа повної поверхні конуса $S_2 = S_1 + \pi R^2 = 90\pi + 36\pi = 126\pi$. Отже, відношення площі повної поверхні конуса до площі його бічної поверхні дорівнює $\frac{S_2}{S_1} = \frac{126\pi}{90\pi} = 1,4$.

34

У правильній трикутній піраміді $SABC$ з основою ABC бічне ребро удвічі більше за сторону основи. Точки K і L є серединами ребер AC і BC відповідно. Через пряму KL паралельно до ребра SC проведено площину α . Знайдіть кут φ між площиною α і площиною (ABC) . У відповідь запишіть значення $3 \cos^2 \varphi$.

Ви відповіли правильно: 0,25

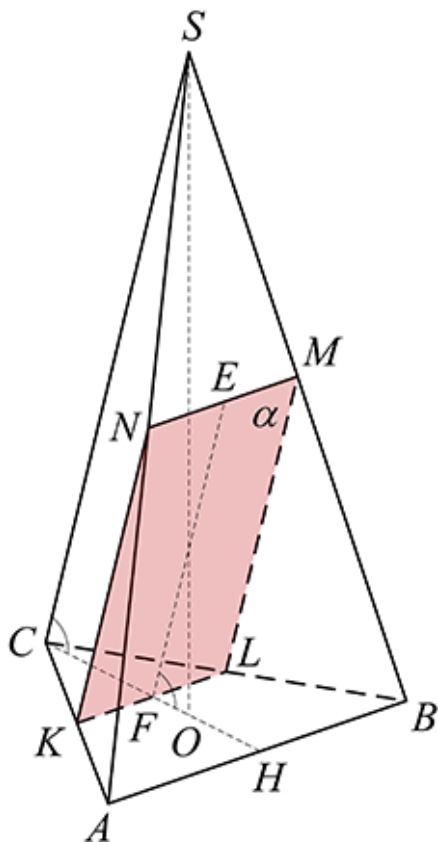
Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

Нехай на рисунку зображена задана піраміда, $AB = AC = BC = a$, $AS = BS = CS = 2a$, $AK = KC$, $BL = LC$, $(KLMN) \parallel SC$. Оскільки всі бокові ребра рівні, вершина піраміди S проектується у точку O — центр описаного кола трикутника ABC , CO — радіус цього кола, $CO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. $CS \parallel KN \parallel FE \parallel LM$. Шуканий кут $\varphi = \angle EFH = \angle SCO$. Розглянемо прямокутний трикутник SOC :

$$\cos \varphi = \frac{CO}{CS} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Отже, } 3 \cos^2 \varphi = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2 = 3 \cdot \frac{3}{36} = \frac{1}{4} = 0,25.$$



35

Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} \frac{(x+3)(x-2)}{x^2-1} \leq 1, \\ 4^{\sqrt{9-x^2}} \leq 0,25^{x-3}. \end{cases}$ У відповідь запишіть кількість цілих розв'язків системи. Якщо система має безліч цілих розв'язків, то у відповідь запишіть число 100.

Ви відповіли правильно: 3

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

$$\begin{cases} \frac{(x+3)(x-2)}{x^2-1} - 1 \leq 0, \\ 4^{\sqrt{9-x^2}} \leq 4^{-1(x-3)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\cancel{x^2} + x - 6 - \cancel{x^2} + 1}{x^2 - 1} \leq 0, \\ \sqrt{9-x^2} \leq -x+3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-5}{(x-1)(x+1)} \leq 0, \\ \sqrt{9-x^2} \leq 3-x. \end{cases}$$

Розв'язуючи першу нерівність системи методом інтервалів, отримаємо, що

$x \in (-\infty; -1) \cup (1; 5]$. Друга нерівність системи рівносильна системі

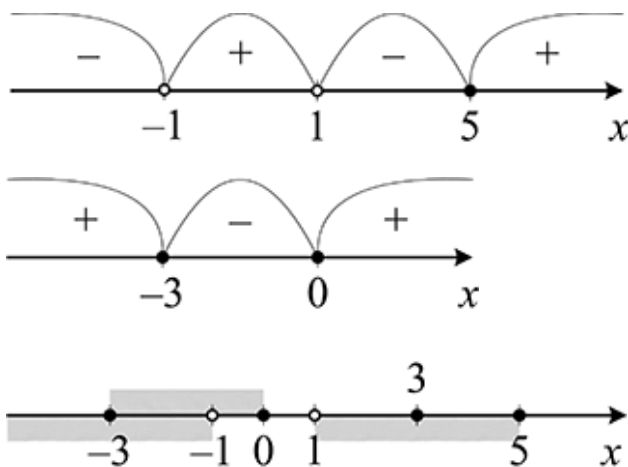
$$\begin{cases} 9 - x^2 \geq 0, \\ 3 - x \geq 0, \\ (\sqrt{9 - x^2})^2 \leq (3 - x)^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \leq 9, \\ x \leq 3, \\ \cancel{9} - x^2 \leq \cancel{9} - 6x + x^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 3, \\ 2x(x - 3) \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 3, \\ x \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty), \end{cases}$$

звідки $x \in [-3; 0] \cup \{3\}$. Об'єднуючи розв'язки нерівностей, маємо $x \in [-3; -1) \cup \{3\}$. Система має три цілих розв'язки (-3 ; -2 і 3).



36

Задано функцію $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$.

1. Знайдіть проміжки зростання та спадання функції, екстремуми функції.
2. Побудуйте ескіз графіка функції $f(x)$.
3. Знайдіть кількість коренів рівняння $f(x) = a$, де $a \in R$, залежно від значення параметра a .

У відповідь запишіть найбільше ціле a , при якому рівняння не має коренів. Якщо такого значення не існує, у відповідь запишіть число 100.

Ви відповіли правильно: -33

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

1. Знайдемо похідну функції.

$$f'(x) = (3x^4 - 4x^3 - 12x^2)' = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2).$$

Її нулями буде $x = 0$ та корені рівняння $x^2 - x - 2 = 0$, $x_1 = -1$ і $x_2 = 2$.

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Дослідивши знак похідної, доходимо висновку, що функція зростає на проміжках $(-1; 0)$ і $(2; +\infty)$ та спадає на проміжках $(-\infty; -1)$ і $(0; 2)$;

$$x_{min_1} = -1, \quad x_{min_2} = 2, \quad x_{max} = 0.$$

$$f(-1) = 3 \cdot (-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 - 12 \cdot (-1)^2 = 3 + 4 - 12 = -5,$$

$$f(2) = 3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 = 48 - 32 - 48 = -32,$$

$$f(0) = 0.$$

2. Зауважимо, що функція f визначена на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$. Вона не є ні парною, ні непарною, оскільки

$$f(-x) = 3 \cdot (-x)^4 - 4 \cdot (-x)^3 - 12 \cdot (-x)^2 = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 \quad \text{не збігається ні з } f(x) \text{ ні з } -f(x).$$

Знайдемо нулі функції.

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = 0,$$

$$x^2(3x^2 - 4x - 12) = 0.$$

Очевидно, що $x = 0$. Розв'яжемо рівняння $3x^2 - 4x - 12 = 0$.

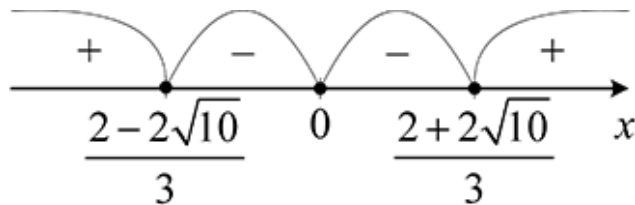
$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-12) = 16 + 144 = 160,$$

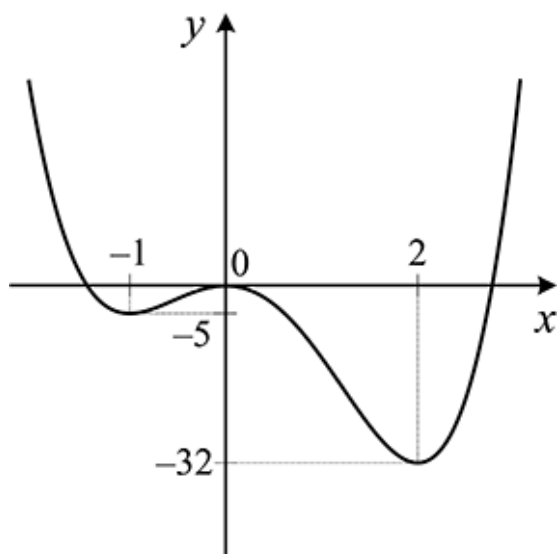
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{160}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 4\sqrt{10}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 2\sqrt{10}}{3}.$$

Таким чином, $f(x) > 0$ при $x \in \left(-\infty; \frac{2 - 2\sqrt{10}}{3}\right) \cup \left(\frac{2 + 2\sqrt{10}}{3}; +\infty\right)$ і

$f(x) < 0$ при $x \in \left(\frac{2 - 2\sqrt{10}}{3}; \frac{2 + 2\sqrt{10}}{3}\right)$.

Ураховуючи отримані результати, будуємо графік функції.





3. Для знаходження кількості коренів рівняння $f(x) = a$ будемо перетинати побудований графік прямими вигляду $y = a$.

Якщо $a < -32$, рівняння не має коренів;

якщо $a = -32$, рівняння має один корінь;

якщо $-32 < a < -5$ або $a > 0$, рівняння має два корені;

якщо $a = -5$ або $a = 0$, рівняння має три корені;

якщо $-5 < a < 0$, рівняння має чотири корені.

