

Тест ЗНО з математики.

Результат

100% :)

Тестовий бал ?

51 із 51

Рейтинговий бал ?

200.0

Витрачено часу: 4 хвилини

[Ще раз](#) [Інший варіант](#) [Статистика](#)

Поділитися...

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

1

Яку з наведених цифр потрібно поставити замість зірочки в записі числа $257*$, щоб отримане число ділилося націло на 3?

А 2

Б 3

В 6

Г 7

Д 9

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

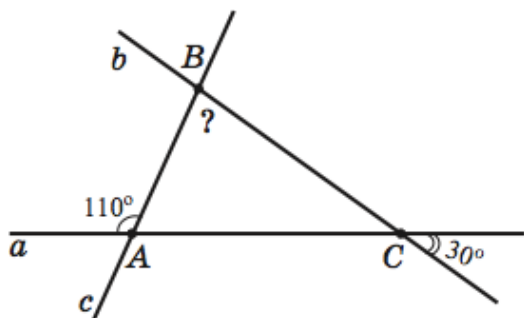
[Приховати пояснення](#)

Число ділиться на 3, коли сума його цифр ділиться на 3. Сума перших трьох цифр даного числа — $2 + 5 + 7 = 14$. Серед наведених відповідей тільки додавання цифри 7 дасть суму, кратну 3:

$$14 + 7 = 21 : 3.$$

2

Прямі a , b , c попарно перетинаються в точках A , B , C (див. рисунок). За даними, вказаними на рисунку, знайдіть градусну міру кута ABC .



- ☐ А 70°
- ☒ Б 80°
- ☐ В 140°
- ☐ Г 100°
- ☐ Д 40°

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$\angle BAC = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$ як вертикальний. Оскільки сума кутів трикутника дорівнює 180° , $\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB = 180^\circ - 70^\circ - 30^\circ = 80^\circ$.

3

Обчисліть $\frac{2}{3} + 0,5$.

☒ А $\frac{2}{3}$

☐ Б $\frac{19}{6}$

☐ В $\frac{9}{5}$

☐ Г $\frac{3}{8}$

☐ Д $\frac{1}{4}$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$\frac{2}{\frac{3}{4}} + 0,5 = \frac{2}{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{\frac{4}{2}} + 0,5 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1+3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

4

Укажіть *хибне* твердження.

☒ А Якщо в чотирикутнику кожна сторона дорівнює протилежній стороні, то такий чотирикутник — паралелограм.

☐ Б Якщо всі кути чотирикутника рівні, то такий чотирикутник — прямокутник.

☐ В Діагоналі прямокутника рівні.

☒ Г Діагоналі прямокутника є бісектрисами його кутів.

☐ Д Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Твердження **А** істинне за ознакою паралелограма.
Твердження **Б** істинне за ознакою прямокутника.
Твердження **В** істинне за властивістю прямокутника.
Твердження **Г** *хибне*.
Твердження **Д** істинне за властивістю ромба.

Розв'яжіть нерівність $-\frac{x}{5} > 5$.

- ☒ А $(-\infty; -25)$
- ☐ Б $(-\infty; -1)$
- ☐ В $(-\infty; 25)$
- ☐ Г $(-1; +\infty)$
- ☐ Д $(-25; +\infty)$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

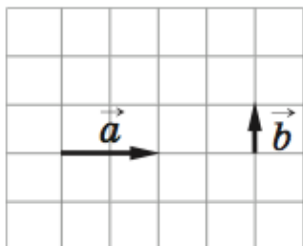
[Приховати пояснення](#)

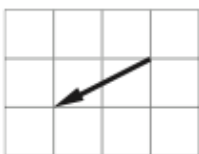
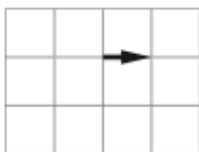
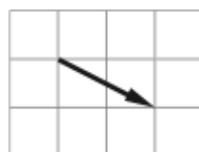
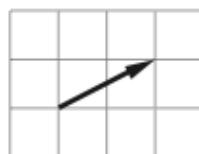
$$-\frac{x}{5} > 5,$$

$$-x > 25,$$

$$x < -25.$$

На рисунку зображено вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Який із наведених векторів дорівнює вектору $\vec{a} + \vec{b}$?



А**Б****В****Г****Д**

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Додамо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ за правилом трикутника. Для цього вектор $\vec{b}$ побудуємо так, щоб його початок співпав з кінцем вектора $\vec{a}$. Тепер сума векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — вектор, початок якого співпадає з початком вектора $\vec{a}$, а кінець — з кінцем вектора $\vec{b}$. Цей вектор зображений на рис. **Д**.

7

Яке з наведених чисел є ірраціональним числом?

А

$\sqrt{0,64}$

Б

$\sqrt{20}$

В

π^0

Г

$\sqrt[3]{8}$

Д

2,7

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

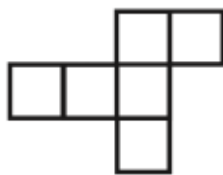
Серед наведених чисел ірраціональним є число $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Усі інші числа $(0,8; 1; 2; 2,7)$ можна записати у вигляді звичайного дробу $\frac{a}{b}$, де a — ціле, а b — натуральне.

8

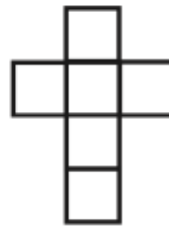
На рисунку зображено три фігури з номерами 1, 2, 3. Серед цих фігур укажіть розгортки куба.



1



2



3

- ☐ А лише фігура 3
- ☐ Б лише фігури 1 і 2
- ☐ В лише фігури 1 і 3
- ☒ Г лише фігури 2 і 3
- ☐ Д фігури 1, 2 і 3

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Лише розгортки 2 і 3 є розгортками куба. Розглянемо фігуру 1 як ланцюжок з квадратиків. При складанні куба перший і останній квадратики ланцюжка утворюватимуть одну і ту саму грань.

9

Обчисліть $\frac{3^5 \cdot 5^4}{15^3}$.

- ☐ А 9
- ☐ Б 15
- ☒ В 45
- ☐ Г 75
- ☐ Д 225

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$\frac{3^5 \cdot 5^4}{15^3} = \frac{3^5 \cdot 5^4}{(3 \cdot 5)^3} = \frac{\overset{3^2}{\cancel{3^3}} \cdot \overset{5}{\cancel{5^4}}}{\cancel{3^3} \cdot \cancel{5^3}} = 3^2 \cdot 5 = 9 \cdot 5 = 45.$$

10

Серед наведених функцій укажіть функцію, область визначення якої збігається з її областю значень.

- ☐ А $y = x^2$
- ☐ Б $y = \operatorname{tg} x$
- ☐ В $y = 3$
- ☐ Г $y = \sin x$
- ☒ Д $y = \sqrt{x}$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

- А)** Область визначення: $x \in (-\infty; +\infty)$; область значень: $[0; +\infty)$.
- Б)** Область визначення: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$; область значень: $(-\infty; +\infty)$.
- В)** Область визначення: $x \in (-\infty; +\infty)$; область значень: $\{3\}$.
- Г)** Область визначення: $x \in (-\infty; +\infty)$; область значень: $[-1; 1]$.
- Д)** Область визначення: $x \in [0; +\infty)$; область значень: $[0; +\infty)$.

Отже, серед наведених функцій тільки у функції $y = \sqrt{x}$ область визначення збігається з областю значень.

11

Чотирикутник $ABCD$ описаний навколо кола. $AB = 12$ см, $BC = 8$ см, $CD = 18$ см.
Знайдіть довжину сторони AD .

- ☐ А 2 см
- ☐ Б 12 см
- ☐ В 14 см
- ☐ Г 20 см
- ☒ Д 22 см

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

У чотирикутник можна вписати коло тоді і тільки тоді, коли суми його протилежних сторін рівні

$$\begin{aligned}AB + CD &= BC + AD, \\12 + 18 &= 8 + AD, \\30 &= 8 + AD, \\AD &= 30 - 8 = 22 \text{ см.}\end{aligned}$$

12

Укажіть рівняння кола з центром у початку координат, якщо воно проходить через точку $(3; -4)$.

- ☐ А $x^2 + y^2 = 5$
- ☐ Б $(x + 3)^2 + (x - 4)^2 = 25$
- ☒ В $x^2 + y^2 = 25$
- ☐ Г $x^2 + y^2 = 49$
- ☐ Д $(x - 3)^2 + (x + 4)^2 = 25$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Загальний вигляд рівняння кола з центром у початку координат $x^2 + y^2 = R^2$, де R — радіус кола. Підставивши координати точки $(3; -4)$, через яку проходить дане коло, знайдемо R^2 :

$$\begin{aligned}3^2 + (-4)^2 &= R^2, \\9 + 16 &= R^2, \\R^2 &= 25.\end{aligned}$$

Отже, шукане рівняння — $x^2 + y^2 = 25$.

13

Знайдіть найменший додатний період функції $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(4x)$.

☒ А $\frac{\pi}{4}$

☐ Б $\frac{\pi}{2}$

☐ В π

☐ Г 2π

☐ Д 4π

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Періодом функції $y = \operatorname{tg} x$ є число π . Оскільки аргумент заданої функції множиться на 4, найменшим додатним періодом функції $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 4x$ буде $\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(4 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} (4x + \pi) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 4x.$$

14

Укажіть суму коренів рівняння $|x - 1| = 6$.

☐ А -2

☐ Б 0

☒ В 2

☐ Г 7

☐ Д 12

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$|x - 1| = 6,$$

$$\begin{cases} x - 1 = 6, \\ x - 1 = -6, \\ x = 7, \\ x = -5. \end{cases}$$

Отже, сума коренів рівняння дорівнює $7 + (-5) = 2$.

15

Якщо $\lg b = 6$, то $\lg(10b^2) =$

- ☐ А 37
- ☐ Б 7
- ☐ В 12
- ☒ Г 13
- ☐ Д 14

Ви відповіли правильно

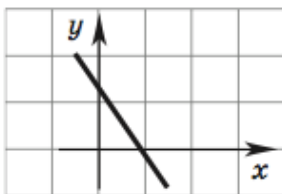
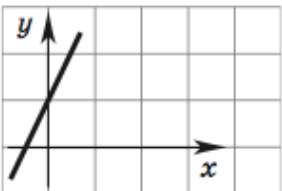
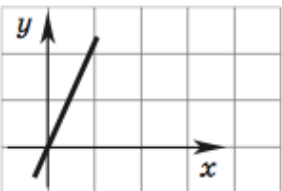
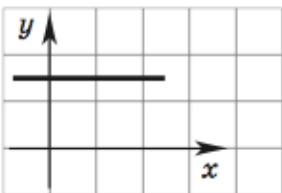
Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$\lg(10b^2) = \lg 10 + \lg b^2 = 1 + 2 \lg b = 1 + 2 \cdot 6 = 1 + 12 = 13.$$

16

Укажіть рисунок, на якому зображено ескіз графіка функції $y = kx$ при $k > 1$.

А**Б****В****Г****Д**

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Графік функції $y = kx$ проходить через точку $(0; 0)$, отже обираємо правильну відповідь серед варіантів **В** та **Г**. При $k > 1$ функція $y = kx$ зростає, отже правильна відповідь зображена на рис. **В**.

Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $3^x = 30$?

- ☐ А (1; 2)
- ☐ Б (2; 3)
- ☒ В (3; 4)
- ☐ Г (4; 5)
- ☐ Д (5; 11)

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Оскільки $3^3 = 27 < 30$, а $3^4 = 81 > 30$, то корінь рівняння $3^x = 30$ належить проміжку (3; 4).

18

Знайдіть точку, симетричну точці $A(2; -3; 7)$ відносно координатної площини yz .

- ☐ А (2; -3; -7)
- ☒ Б (-2; -3; 7)
- ☐ В (2; 3; 7)
- ☐ Г (-2; 3; -7)
- ☐ Д (-2; -3; -7)

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

При симетрії відносно площини yz абсциси відповідних точок протилежні, тобто точці A буде симетрична точка $A'(-2; -3; 7)$.

19

В арифметичній прогресії (a_n) $a_2 = -9$, $a_4 = -4$. Визначте різницю цієї прогресії.

- ☒ А 2,5
- ☐ Б 6,5
- ☐ В $-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}$
- ☐ Г -2,5
- ☐ Д -6,5

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Оскільки $a_4 = a_2 + 2d$, то $-4 = -9 + 2d$, $2d = 9 - 4 = 5$, $d = 2,5$.

20

Периметр осьового перерізу циліндра дорівнює 32 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо його висота дорівнює 10 см.

- ☐ А $30\pi \text{ см}^2$
- ☒ Б $60\pi \text{ см}^2$
- ☐ В $90\pi \text{ см}^2$
- ☐ Г $120\pi \text{ см}^2$
- ☐ Д $360\pi \text{ см}^2$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Площа бічної поверхні циліндра $S = 2\pi RH$, де R — радіус його основи, H — висота. Периметр осьового перерізу $P = 2(2R + 10) = 32$, звідки $2R + 10 = 16$, $2R = 6$, $R = 3$ см. Отже шукане значення $S = 2\pi \cdot 3 \cdot 10 = 60\pi \text{ см}^2$.

21

Знайдіть похідну функції $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

☐ А $f'(x) = \frac{1 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$

☒ Б $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

☐ В $f'(x) = \frac{1}{2x}$

☐ Г $f'(x) = \frac{1 - x^2}{x^2 + 1}$

☐ Д $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right)' &= \frac{(x)' \cdot (x^2 + 1) - (x^2 + 1)' \cdot x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - (2x) \cdot x}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

22

Висота конуса вдвічі менша за діаметр його основи. Знайдіть градусну міру кута між твірною конуса та площиною його основи.

☐ А 15°

☐ Б 30°

☒ В 45°

☐ Г 60°

☐ Д 75°

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Оскільки висота конуса вдвічі менша за діаметр його основи, то висота конуса дорівнює радіусу його основи. Отже прямокутний трикутник, складений з радіуса, висоти та твірної — рівнобедрений прямокутний. Отже шуканий гострий кут — гострий кут рівнобедреного

прямокутного трикутника, він дорівнює 45° .

23

Обчисліть $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

- ☐ А $-\frac{\pi}{3}$
- ☐ Б $-\frac{\pi}{6}$
- ☐ В $\frac{\pi}{6}$
- ☐ Г $\frac{2\pi}{3}$
- ☒ Д $\frac{5\pi}{6}$

Ви відповіли правильно

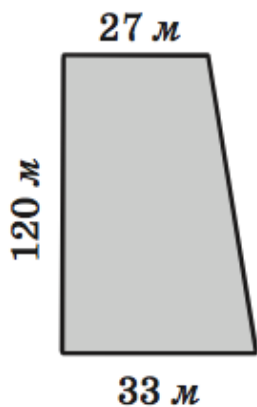
Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

24

Господарю потрібно зорати город, що має форму прямокутної трапеції. Розміри городу вказано на рисунку. Оранка трактором ділянки площею 100 м^2 коштує 8 грн. Скільки грошей (у грн) повинен заплатити господар трактористу за оранку всього городу?



- ☐ А 144 грн
- ☐ Б 450 грн
- ☐ В 576 грн
- ☒ Г 288 грн
- ☐ Д 360 грн

Ви відповіли правильно

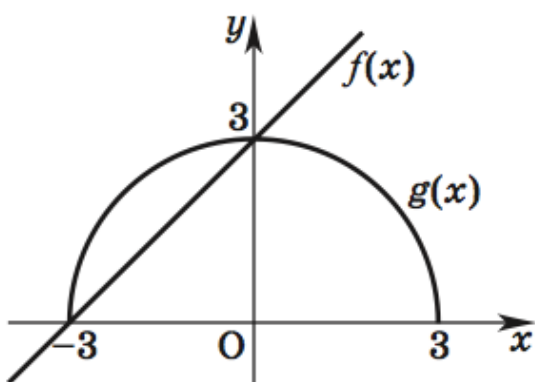
Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

Площа трапеції $S = \frac{27 + 33}{2} \cdot 120 = 30 \cdot 120 = 3600 \text{ м}^2$, отже за оранку всього городу господар має заплатити трактористу $\frac{3600}{100} \cdot 8 = 36 \cdot 8 = 288$ грн.

25

На рисунку зображено графіки функцій $f(x) = x + 3$ і $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$. Розв'яжіть нерівність $f(x) \geq g(x)$.



- ☒ А $\{-3\} \cup [0; 3]$
- ☐ Б $(-\infty; -3] \cup [0; +\infty)$
- ☐ В $[-3; 0]$
- ☐ Г $\{-3\} \cup [0; +\infty]$
- ☐ Д $[0; 3]$

Ви відповіли правильно

Бали: 1 із 1

[Приховати пояснення](#)

У точках $x = -3$ та $x = 0$ значення функцій співпадають. На проміжку $(-3; 0)$ $g(x) > f(x)$. На проміжку $(0; 3)$ $f(x) > g(x)$. Отже, нерівність $f(x) \geq g(x)$ має розв'язок $\{-3\} \cup [0; 3]$.

26

Установіть відповідність між функціями (1—4) та їхніми графіками (А—Д).

Функція

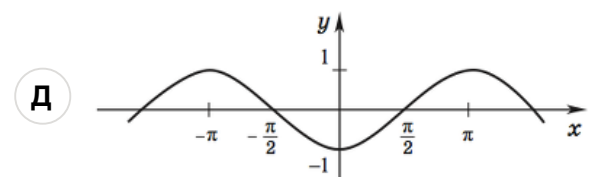
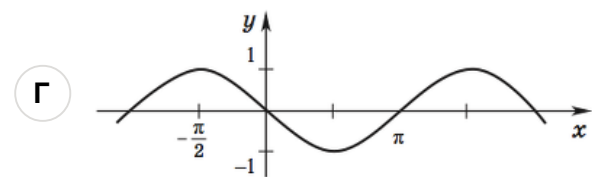
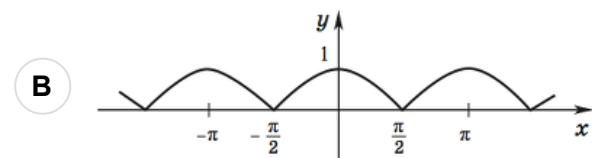
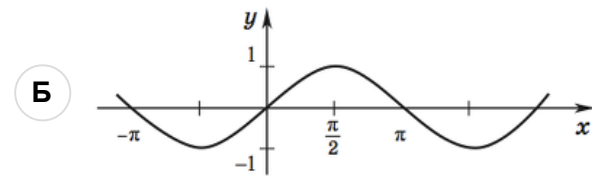
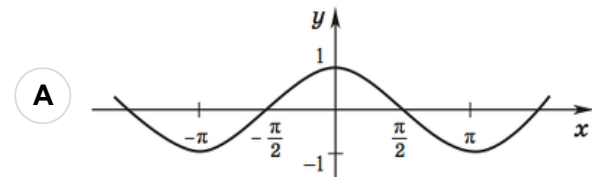
Графік функції

1 $y = \sin x$

2 $y = -\cos x$

3 $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

4 $y = \cos |x|$



	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☒	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☒
3	☐	☐	☐	☒	☐
4	☒	☐	☐	☐	☐

Ви відповіли правильно

Бали: 4 із 4

[Приховати пояснення](#)

- 1) Функція $y = \sin x$ непарна, отже шукаємо графік серед рисунків Б та Г. Оскільки $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, то графік функції $y = \sin x$ зображено на рис. Б.
- 2) «Перегорнута» косинусоїда зображена на рис. Д.
- 3) $y = \cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$. «Перегорнута» синусоїда зображена на рис. Г.
- 4) Функція $y = \cos |x|$ — парна, її графік при $x > 0$ збігається з графіком функції $y = \cos x$. Отже графік функції $y = \cos |x|$ зображений на рис. А.

27

Установіть відповідність між числовими виразами (1—4) та їхніми значеннями (А—Д).

Числовий вираз

Значення виразу

- | | | | |
|---|---------------------------------------|---|----|
| 1 | $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6}$ | А | 15 |
| 2 | $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$ | Б | 6 |
| 3 | $(3\sqrt{3} - \sqrt{12})^2$ | В | 5 |
| 4 | $\sqrt{2}(\sqrt{50} - \sqrt{8})$ | Г | 3 |
| | | Д | 1 |

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☒	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☒
3	☐	☐	☐	☒	☐
4	☐	☒	☐	☐	☐

Ви відповіли правильно

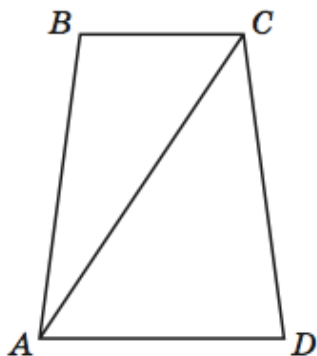
Бали: 4 із 4

[Приховати пояснення](#)

- 1) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 3 + 2\sqrt{6} + 2 - 2\sqrt{6} = 5$.
- 2) $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) = (\sqrt{5})^2 - 2^2 = 5 - 4 = 1$.
- 3) $(3\sqrt{3} - \sqrt{12})^2 = (3\sqrt{3} - 2\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$.
- 4) $\sqrt{2}(\sqrt{50} - \sqrt{8}) = \sqrt{2}(5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 3 \cdot 2 = 6$.

28

На рисунку зображено рівнобедрену трапецію $ABCD$, у якій $AD = 8$ см, $BC = 4$ см, $AC = 10$ см. Установіть відповідність між проекцією відрізка на пряму (1—4) та довжиною проекції (А—Д).



Проекція відрізка на пряму

- 1 проекція відрізка BC на пряму AD
- 2 проекція відрізка CD на пряму AD
- 3 проекція відрізка AC на пряму AD
- 4 проекція відрізка AD на пряму AC

Довжина проекції

- А 2 см
- Б 4 см
- В 4,8 см
- Г 5,6 см
- Д 6 см

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☒	☐	☐	☐
2	☒	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☒
4	☐	☐	☒	☐	☐

Ви відповіли правильно

Бали: 4 із 4

[Приховати пояснення](#)

1) Проекцією відрізка BC на пряму AD буде відрізок B_1C_1 , $B_1C_1 = BC = 4$ см.

2) Проекцією відрізка CD на пряму AD буде відрізок C_1D ,

$$C_1D = \frac{AD - BC}{2} = \frac{8 - 4}{2} = 2 \text{ см.}$$

3) Проекцією відрізка AC на пряму AD буде відрізок AC_1 ,

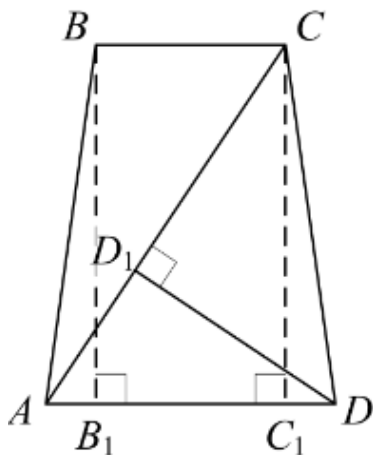
$$AC_1 = AD - C_1D = 8 - 2 = 6 \text{ см.}$$

4) Проекцією відрізка AD на пряму AC буде відрізок AD_1 . Знайдемо висоту трапеції:

$$CC_1 = \sqrt{AC^2 - AC_1^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \text{ см. Нехай}$$

$$\angle CAC_1 = \alpha. \text{ З прямокутного трикутника } ACC_1: \cos \alpha = \frac{AC_1}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

$$\text{прямокутного трикутника } ADD_1: AD_1 = AD \cos \alpha = 8 \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{5} = 4,8 \text{ см.}$$



29

Знайдіть найбільше значення функції $y = -x^2 + 3x - 4$.

Якщо функція не має найбільшого значення, то у відповідь запишіть число 100.

Ви відповіли правильно: $-1,75$

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

Графік даної функції — парабола. Оскільки коефіцієнт при x^2 від'ємний, вітки параболи опущені вниз. Очевидно, що найбільше значення парабола приймає у вершині. Координата вершини $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot (-1)} = \frac{3}{2}$, значення функції в цій точці дорівнює

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{2} - 4 = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} - 4 = \frac{-9 + 18 - 16}{4} = -\frac{7}{4} = -1,75.$$

30

Скільки літрів 5-відсоткового розчину солі потрібно додати до 30 літрів 12-відсоткового розчину солі, щоб одержати 9-відсотковий розчин солі?

Ви відповіли правильно: 22,5

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

Нехай для одержання потрібної концентрації потрібно додати x л 5% розчину солі. У ньому міститься $\frac{5}{100} \cdot x = \frac{x}{20}$ чистої солі. У 30 літрах 12% розчину солі міститься

$\frac{12}{100} \cdot 30 = 3,6$ чистої солі. У одержаному 9% розчині буде міститися $\frac{9}{100}(30 + x)$ чистої солі. Розв'яжемо рівняння

$$\frac{x}{20} + 3,6 = \frac{9}{100}(30 + x),$$

$$5x + 360 = 9(30 + x),$$

$$5x + 360 = 270 + 9x,$$

$$4x = 90,$$

$$x = 22,5.$$

31

Заступник директора школи складає розклад уроків для 10-го класу. Він запланував на понеділок шість уроків з таких предметів: геометрія, біологія, англійська мова, хімія, фізична культура, географія. Скільки всього існує різних варіантів розкладу уроків на цей день, якщо урок фізичної культури має бути останнім у розкладі?

Ви відповіли правильно: 120

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

Фактично нам залишилося розмістити п'ять предметів (англійська мова, біологія, географія, геометрія, хімія) на перші п'ять уроків. Отже, кількість різних варіантів розкладу уроків на цей день дорівнює кількості перестановок з п'яти елементів $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

32

Знайдіть значення виразу $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = 4$.

Ви відповіли правильно: 18

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

Піднесемо обидві частини виразу $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = 4$ до квадрату:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 16,$$

звідки

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 16 + 2 = 18.$$

33

Розв'яжіть нерівність $3 \cdot 9^x - 2 \cdot 15^x - 5^{2x+1} > 0$. Якщо нерівність має цілі розв'язки, то вкажіть *найбільший* з них. Якщо нерівність має розв'язки, але вказати найбільший цілий розв'язок неможливо, то у відповідь запишіть число 50. Якщо нерівність не має розв'язків, то у відповідь запишіть число 100.

Ви відповіли правильно: -2

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

$$3 \cdot 9^x - 2 \cdot 15^x - 5^{2x+1} > 0.$$

Почленно поділимо нашу нерівність на 5^{2x} , оскільки $5^x > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$:

$$3 \cdot \frac{3^{2x}}{5^{2x}} - 2 \cdot \frac{15^x}{5^{2x}} - 5 \cdot \frac{5^{2x}}{5^{2x}} > 0,$$

$$3 \cdot \frac{3^{2x}}{5^{2x}} - 2 \cdot \frac{(3 \cdot 5)^x}{5^{2x}} - 5 > 0,$$

$$3 \cdot \frac{3^{2x}}{5^{2x}} - 2 \cdot \frac{3^x \cdot 5^x}{5^{2x}} - 5 > 0,$$

$$3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x - 5 > 0.$$

Зробимо заміну $\left(\frac{3}{5}\right)^x = t > 0$: $3t^2 - 2t - 5 > 0$.

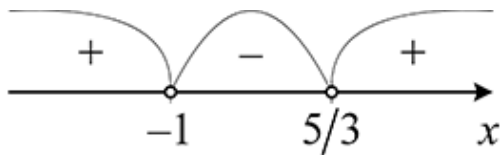
Дискримінант квадратного тричлена $3t^2 - 2t - 5$ дорівнює $D^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 4 + 60 = 64$, корені рівняння $3t^2 - 2t - 5 = 0$:

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 8}{6} = \frac{1 \pm 4}{3}, \quad t_1 = \frac{5}{3}, \quad t_2 = -1.$$

Отже, розв'язок нерівності $t \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$. Ураховуючи, що $t > 0$, маємо

$t > \frac{5}{3}$. Роблячи зворотну заміну, маємо $\left(\frac{3}{5}\right)^x > \frac{5}{3}$, $\left(\frac{3}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$. Оскільки

$\frac{3}{5} < 1$, то розв'язком останньої нерівності буде $x < -1$. У відповідь запишемо найбільший цілий розв'язок нерівності $x = -2$.



34

В основі піраміди лежить прямокутний трикутник із кутом 15° . Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 60° . Радіус кулі, описаної навколо піраміди, дорівнює 6 см. Обчисліть об'єм піраміди (у см^3).

Ви відповіли правильно: 40,5

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

Нехай $PABC$ — задана піраміда, трикутник ABC — прямокутний ($\angle C = 90^\circ$), $\angle CAB = 15^\circ$, точка O — центр кулі. Оскільки всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під однаковим кутом, вершина піраміди проектується у центр описаного кола основи. У прямокутному трикутнику він знаходиться на середині гіпотенузи

(точка K). Для обчислення об'єму піраміди необхідно знайти площу її основи і висоту.

Нехай $BK = x$. З прямокутного трикутника PBK : $PK = BK \operatorname{tg} 60^\circ = x\sqrt{3}$,

$BP = \frac{BK}{\cos 60^\circ} = 2BK = 2x$. Розглянемо трикутник APK , рівний трикутнику PKB . У

ньому $AO = OP$ як радіуси кулі, отже трикутник AOP — рівнобедрений. Оскільки $\angle PAK = 60^\circ$, то $\angle APO = \angle OAP = 60^\circ$, отже AO — бісектриса цього трикутника.

Тоді за властивістю бісектриси $\frac{PO}{OK} = \frac{AP}{AK} = \frac{BP}{BK} = \frac{2x}{x} = \frac{2}{1}$.

Оскільки $PK = PO + OK = x\sqrt{3}$, то радіус кулі $R = PO = \frac{2}{3} \cdot x\sqrt{3} = 6$ см, звідки

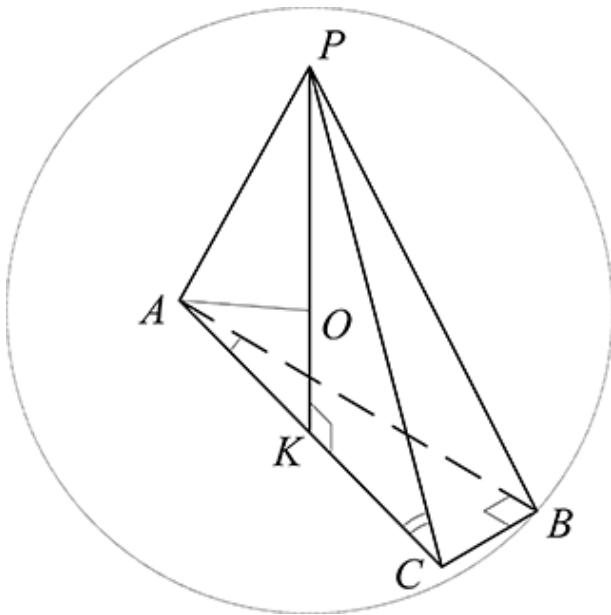
$x = \frac{6 \cdot 3}{2\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$. Таким чином, висота піраміди $PK = x\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9$ см, а

гіпотенуза основи $AB = 2x = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ см. Розглянемо трикутник ACB : $AC = AB \cos 15^\circ = 6\sqrt{3} \cos 15^\circ$ см. Площа трикутника ACB :

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \cos 15^\circ \sin 15^\circ = \frac{(6\sqrt{3})^2}{4} \times$$

$$\times 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = 27 \sin 30^\circ = \frac{27}{2} \text{ см}^2.$$

Таким чином об'єм піраміди $V = \frac{1}{3} S_{ACB} \cdot PK = \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{2} \cdot 9 = \frac{81}{2} = 40,5 \text{ см}^3$.



35

Укажіть *найменше* значення a , при якому рівняння $\frac{x^2 - x + a}{2x + 3} = 0$ має рівно один корінь.

Ви відповіли правильно: $-3,75$

Бали: 2 із 2

[Приховати пояснення](#)

Область визначення лівої частини рівняння $x \neq -1,5$. Для того, щоб задане рівняння мало рівно один корінь, квадратний тричлен у чисельнику лівої частини рівняння повинен мати або

два різних корені, один з яких співпадає з $x = 1,5$, або один корінь, що відрізняється від $x = 1,5$.

Якщо один з коренів $x^2 - x + a = 0$ дорівнює $-1,5$, підставивши його значення у рівняння, одержимо

$$\begin{aligned}(-1,5)^2 - (-1,5) + a &= 0, \\ 2,25 + 1,5 + a &= 0, \\ a &= -3,75.\end{aligned}$$

Тоді за теоремою Вієта другий корінь рівняння дорівнює $\frac{-3,75}{-1,5} = 2,5 \neq -1,5$.

Якщо рівняння $x^2 - x + a = 0$ має один корінь, його дискримінант дорівнює нулю:

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a = 1 - 4a = 0,$$

$$a = 0,25,$$

$$x = 0,5 \neq -1,5.$$

Отже рівняння $\frac{x^2 - x + a}{2x + 3} = 0$ має рівно один корінь при $a = -3,75$ і $a = 0,25$. У

відповідь вписуємо найменше з цих значень — $a = -3,75$.